

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный аграрный университет»

О. В. Бердюгина, Л. Ю. Стриганова, М. Л. Юсупов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
В ПРИМЕРАХ АГРАРНОГО ПРОИЗВОДСТВА.
СТАТИКА. КИНЕМАТИКА

Учебник для аграрных вузов

Екатеринбург
Издательство Уральского ГАУ
2020

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
БЗО

Рецензент:

М. Б. Носырев, доктор технических наук, профессор,
Почетный работник высшего профессионального образования РФ

Бердюгина, О. В.

БЗО Сборник задач по теоретической механике в примерах аграрного производства. Статика. Кинематика: учебник для аграрных вузов / О. В. Бердюгина, Л. Ю. Стриганова, М. Л. Юсупов. – Екатеринбург : Издательство Уральского ГАУ, 2020. – 116 с.: Библиогр.: 13 назв.; 125 рис.

ISBN 978-5-87203-460-5

В сборнике задач устанавливаются межпредметные связи теоретической механики со специальными дисциплинами при обучении инженеров аграрного производства. В пособии представлены примеры решения задач, а также задачи, упражнения и вопросы для самостоятельной работы, рекомендованная литература.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Агроинженерия» и может быть использовано в технических вузах.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 978-5-87203-460-5

© О. В. Бердюгина, 2020
© Л. Ю. Стриганова, 2020
© М. Л. Юсупов, 2020
© Уральский государственный
аграрный университет, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

.....	
ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	7
ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ	9
Вопросы для самоконтроля	14
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. СТАТИКА	15
Глава 1. Система сходящихся сил	15
1.1. Основные положения	15
1.2. Упражнения	18
Вопросы для самоконтроля	22
Глава 2. Система параллельных сил	23
2.1. Основные положения	23
2.2. Упражнения	28
Вопросы для самоконтроля	33
Глава 3. Произвольная система сил	34
3.1. Основные положения	34
3.2. Примеры и решение задачи на равновесие тела при наличии трения	39
3.3. Примеры и решение задачи на равновесие рычага и опрокидывание	46
3.4. Упражнения	50
3.5. Силы, произвольно расположенные в пространстве	57
Вопросы для самоконтроля	60
Глава 4. Центр тяжести	61
4.1. Основные положения	61
4.2. Упражнения	64
Вопросы для самоконтроля	67
ЧАСТЬ ВТОРАЯ. КИНЕМАТИКА	69
Глава 5. Кинематика материальной точки	70
5.1. Основные положения	70

5.2. Упражнения	75
Вопросы для самоконтроля	77
Глава 6. Вращательное движение твердого тела	78
6.1. Основные положения	78
6.2. Решение задач	80
6.3. Упражнения	82
Вопросы для самоконтроля	85
Глава 7. Сложное движение материальной точки	86
7.1. Основные положения	86
7.2. Примеры решения задач	88
7.3. Упражнения	93
Вопросы для самоконтроля	97
Глава 8. Плоскопараллельное движение твердого тела	98
8.1. Основные положения	98
8.2. Частные случаи нахождения мгновенного центра скоростей	100
8.3. Пример. Решение задач	103
8.4. Упражнения	108
Вопросы для самоконтроля	112
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	113
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	115

Предисловие

.....

Теоретическая механика входит в вариативную часть учебных планов по программам бакалавров агроинженерного направления. Многие вопросы, возникающие при работе инженеров сельскохозяйственного производства, связаны с общими законами движения и равновесия тел, составляющими основу теоретической механики. Также вопросы механики рассматриваются в смежных и специальных технических дисциплинах, изучаемых при получении агроинженерного образования.

Для успешного изучения механики, кроме изучения теории, обучающимся необходимы навыки в решении задач. Практика показывает, что курс теоретической механики является трудоемким, а способы решения задач студентами усваиваются значительно труднее, чем теория предмета. Это обуславливается тем, что небольшое число общих законов теории имеет обширную сферу применения на практике. Трудности при решении задач состоят в неумении облекать конкретные физические процессы в абстрактную математическую форму и наоборот. Предлагаемый сборник задач может оказать помощь обучающимся в приобретении навыков применения теоретических знаний в область решения производственных задач. В данном учебном пособии также устанавливаются межпредметные связи теоретической механики со специальными курсами дисциплин, изучаемых при обучении инженеров сельскохозяйственного производства.

Порядок расположения материала данного сборника соответствует программе курса теоретической механики по разделам статика и кинематика. В каждой главе пособия сначала излагаются основные положения теоретической механики по данной теме. Затем приводятся примеры из аграрного производства. В большинстве примеров содержится краткое описание назначения устройства рассматриваемого в задаче, выбираются методы его расчета и работы. Кроме примеров, в каждой главе имеются упражнения для самостоятельной работы. После каждой задачи приводятся ответы для проверки правильности решения. В конце раздела имеются вопросы для самоконтроля теоретических знаний применяемых в соответствующем разделе.

В пособие включены задачи из источников, указанных в списке литературы, а также вновь составленные задачи. Задачник рассчитан на студентов технических направлений обучения высших учебных аграрных заведений.

Принятые обозначения

.....

Для решения задач принята классическая система обозначений терминов теоретической механики, которые приводятся в таблице.

№	Термины	Принятые обозначения
1	Абсолютная скорость точки	V_a
2	Абсолютное ускорение точки	a_a
3	Активные силы	$Q; G; P$
4	время	t
5	вторая производная	$\ddot{X}$
6	декартовы координаты	x, y, z
7	Момент пары сил	M
8	Момент силы относительно точки O	$M_O (F)$
9	Натяжение нити	T
10	Нормальное ускорение	a^n
11	Относительная скорость точки	V_r
12	Первая производная	$\dot{X}$
13	Переносная скорость точки	V_e
14	Полное ускорение	$a^{пол}$
15	Проекция силы на ось	$F_x; F_y; F_z$
16	Проекция скорости в декартовой системе координат	$V_x; V_y; V_z$
17	Проекция ускорения в декартовой системе координат	$a_x; a_y; a_z$
18	Равнодействующая сила	R
19	Сила	F
20	сила нормального давления	N
21	скорость	V
22	Составляющие силы	$\vec{X}; \vec{Y}; \vec{Z}$
23	Тангенциальное ускорение	a^{τ}
24	Угловая скорость	ω
25	Угловое ускорение	ε
26	Угол поворота твердого тела	ϕ
27	Усилие в стержне	S
28	Ускорение точки	a

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ

.....

Теоретическая механика является одной из фундаментальных общенаучных дисциплин, в которой раскрываются общие законы движения и равновесия материальных тел и возникающее при этом взаимодействие между телами. Механическим движением называется изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел (или изменение взаимного положения частей тела).

Тела, движение или равновесие которых исследуется, представляют собой простейшие модели материальных тел – материальную точку и абсолютно твердое тело. Материальной точкой называют тело, имеющее массу, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Абсолютно твердым называется тело, расстояние, между любыми точками которого есть величина постоянная.

Основными разделами теоретической механики являются статика, кинематика и динамика.

В статике излагается общее учение о силах, действующих на тело или систему механических тел, а также изучается равновесие тел под действием приложенных к ним сил. При решении большинства задач статики приходится иметь дело с несвободными телами, т. е. такими телами, перемещение которых в пространстве ограничено некоторыми заданными условиями, называемыми в механике связями. Твердое тело называется свободным, если его перемещение ничем не ограничивается. Иначе тело называется несвободным (рис. 1).

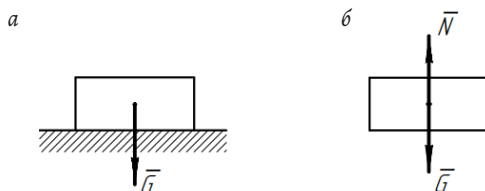


Рис. 1. Условное тело: а – несвободное тело; б – свободное тело

Ограничения, наложенные на перемещения тела, называются связями. Связи всегда осуществляются какими-либо материальными телами. Реакцией связи называется сила, с которой связь препятствует перемещению тела, согласно, третьего закона Ньютона [2].

Рассмотрим основные типы связей и направления их реакций, которые часто применяются и являются основой при решении задач механики.

1. Гладкая поверхность (рис. 2, а, б).

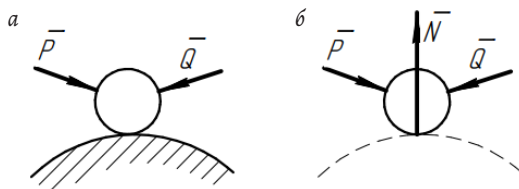


Рис. 2. Гладкая поверхность: а – действие сил; б – замена сил

Если на тело, находящееся на гладкой поверхности (без трения рис. 3, а), действуют силы, P и F , то создаётся сила давления на поверхность и, как противодействие – реакция поверхности. Используя принцип освобождения от связи, можно рассмотреть это тело как свободное: отбросить связь и заменить ее силой N – реакцией связи. Реакция гладкой опорной поверхности направлена по перпендикуляру к опорной поверхности (см. рис. 2, 3). Если тело находится на негладкой (шероховатой) поверхности (рис. 3, б), то в опоре добавляется действие силы трения.

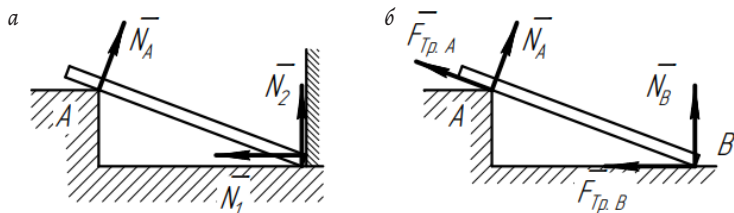


Рис. 3. Опорная поверхность:

а – гладкая без трения; б – шероховатая, с трением

2. Гибкая нерастяжимая нить (цепь, трос, канат и т. д.). Реакция любой нерастяжимой нити направлена вдоль нити к точке подвеса (см. рис. 4).

3. Неподвижный цилиндрический шарнир или шарнирно-неподвижная опора (позволяет взаимодействующим телам вращаться вокруг неподвижной оси) представлена на (рис. 5 и 6).

Реакция расположена на плоскости, перпендикулярной оси, и может иметь любое направление в ней (рис. 5, а).

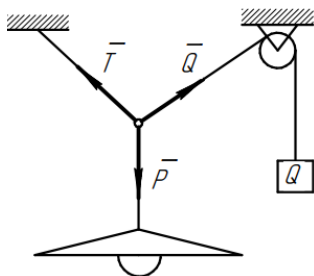


Рис. 4. Гибкая нерастяжимая нить

Поэтому реакцию шарнира раскладывают в плоскости на две составляющие силы (рис. 5, а и б).

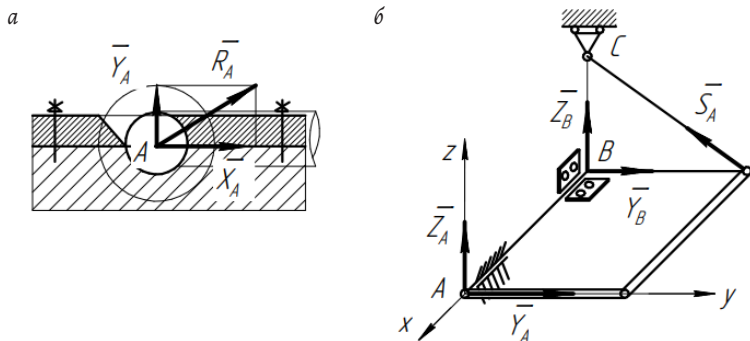


Рис. 5. Неподвижный цилиндрический шарнир:
а – наглядное изображение; б – в пространстве

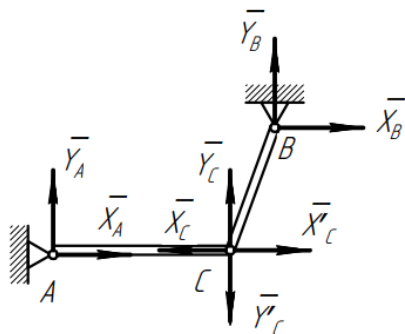


Рис. 6. Цилиндрический шарнир

4. Подвижный шарнир или шарнирно-подвижная опора (позволяет телу перемещаться в одном направлении и вращаться вокруг оси, она препятствует перемещению в направлении, перпендикулярном направлению перемещения). Реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности, по которой возможно перемещение (рис. 7).

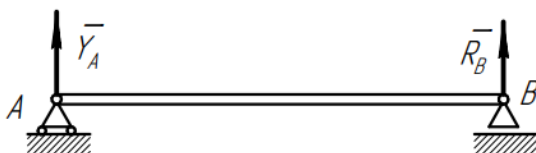


Рис. 7. Шарнирно-подвижная опора
(подвижный цилиндрический шарнир)

5. Идеальный (невесомый) стержень (невесомое тело, которое к опоре и данному телу, крепится шарнирами). Идеальный стержень может либо растягиваться, либо сжиматься (рис. 8).

Его реакция направлена вдоль стержня. Если стержень растянуть, то его реакция будет направлена внутрь стержня.

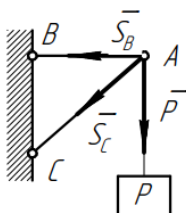


Рис. 8. Идеальный стержень

6. Жесткая заделка (неподвижная защемляющая опора, препятствующая перемещению тела в плоскости действия сил). Ее называют защемляющей опорой (рис. 9).

Реакция жесткой заделки состоит из силы реакции и момента силы. Сила реакции раскладывается на две составляющие силы (в примере $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$) и добавляется реактивный момент M_A .

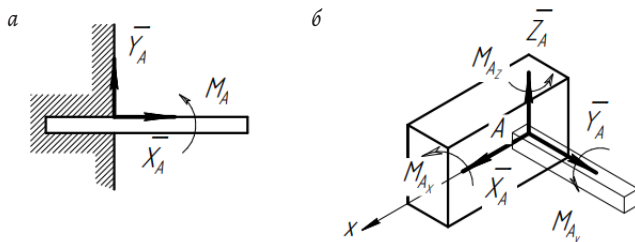


Рис. 9. Жесткая заделка: а – в плоскости; б – в пространстве

7. Скользящая плоская заделка и бискользящая плоская заделка. Препятствуют повороту и движению в одном направлении. Реакция состоит из момента пары сил M_A и силы, перпендикулярной опорной поверхности (рис. 10).

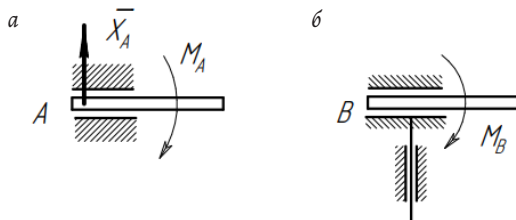


Рис. 10. Заделка: а – скользящая плоская; б – бискользящая плоская

Основной метод решения задач статики на равновесие несвободного твердого тела основан на аксиоме связей:

всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить наложенные на него связи и заменить, их действие силами реакций связей [4].

При решении задач статики необходимо придерживаться следующего алгоритма:

1. Выделить тело, узел или точку, равновесие которых следует рассмотреть для нахождения искомых величин.
2. Изобразить действующие на тело активные силы.
3. Освободить тело от связей, заменив их действие реакциями связей (на основании аксиомы связей).
4. Указать действующую систему сил, состоящую из активных сил (заданных) и сил реакций связей. Определить вид получившейся системы сил.

5. Выбрать метод решения задачи (геометрический, графический или аналитический).

6. При аналитическом методе решения составить для полученной системы сил соответствующие уравнения равновесия.

7. Определить искомые величины и проанализировать полученный результат.

Вопросы для самоконтроля

В чём заключается принцип освобожденности от связей?

Какое тело называется несвободным, а какое свободным?

Что в механике называется связью?

Что называется реакцией связи?

Как направлена реакция связи скользящей заделка?

Как направлена реакция связи сферического шарнира или подпятника?

Как направлена реакция связи подвижного цилиндрического шарнира?

Как показать реакцию связи неподвижного цилиндрического шарнира?

Как направлена реакция связи невесомого стержня?

Как формулируется план решения задач статики на равновесие тел?

Часть первая. СТАТИКА

.....

ГЛАВА 1. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

1.1. Основные положения

Системой сил в механике называется несколько сил, действующих на тело в данный момент.

Сходящаяся система сил – это несколько сил, линии действия которых, пересекаются в одной точке. Если силы, действующие на тело, расположены в одной плоскости, то такая система сил называется плоской, если в разных плоскостях – пространственной системой сил.

Геометрическое условие равновесия сходящейся системы сил заключается в том, что их результирующая сила равна нулю. Это означает, что силовой многоугольник, построенный из этих сил, должен быть замкнутый.

Аналитическое условие равновесия заключается в том, что сумма проекций сил на ось должна быть равна нулю.

Для пространственной сходящейся системы сил составляются три уравнения (условия) равновесия:

$$\sum_1^n F_{xn} = 0; \quad \sum_1^n F_{yn} = 0; \quad \sum_1^n F_{zn} = 0.$$

Для плоской сходящейся системы сил составляются два уравнения (условия) равновесия:

$$\sum_1^n F_{xn} = 0; \quad \sum_1^n F_{yn} = 0.$$

В случае, когда тело находится в равновесии под действием только трёх сил, удобно для решения задач пользоваться следующей теоремой «О трёх силах»:

если тело находится в равновесии под действием трёх непараллельных и лежащих в одной плоскости сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке [1].

Необходимо учитывать, что в равновесии может находиться не одно, а несколько сочлененных тел. В этом случае для определения искомых величин следует рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности. При этом для n сочлененных тел можно составить всего $3n$ уравнений равновесия, если на каждое тело действует пространственная система сходящихся сил, и $2n$ уравнений в случае плоской системы сил.

Пример. «Определение направления равнодействующей нормальных реакций почвы»

При рассмотрении движения направляющего колеса трактора, снабженного баллоном (рис. 11), обычно учитывают только толкающую (движущую) силу $\vec{F}$, нагрузку на колесо $\vec{Q}$ (включая вес колеса) и равнодействующую $\vec{R}_A$ нормальных реакций почвы, так как трением в подшипниках и касательными реакциями почвы ввиду их малых значений пренебрегают.

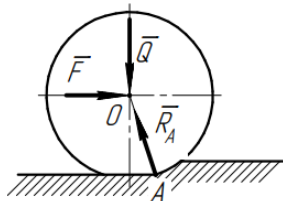


Рис. 11

При установившемся (равномерном) движении колеса, действующие на него силы, должны быть уравновешены. Так как линии действия двух из указанных сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ проходят через ось колеса (точку O), то в соответствии с теоремой о трех силах линия действия равнодействующей $\vec{R}_A$ реакций почвы также должна проходить через точку O.

ЗАДАЧА. Сцепка состоит из четырех тросов AO, BO, AC, и BC, образующих квадрат (рис. 12). Между точками A и B по диагонали квадрата вставлен брус, а в точках A, B и C приложены силы $Q = 5$ кН каждая. Определить натяжение тросов, а также усилие в бросе AB.

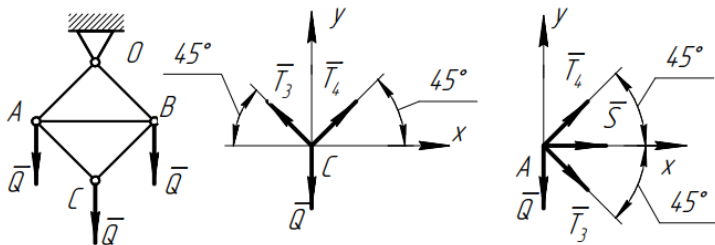


Рис. 12

РЕШЕНИЕ. Задачу решаем методом расчленения конструкции, последовательно рассматривая равновесие узлов C и A. На узел C действует плоская

система сходящихся сил $\{\bar{Q}, \bar{T}_3, \bar{T}_4\}$, где $\bar{T}_3$ и $\bar{T}_4$ – усилия в тросах AC и BC, при рассмотрении равновесия узла C имеем:

$$\sum_1^n F_{xk} = 0; \quad T_4 \cdot \cos 45^\circ - T_3 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_1^n F_{yk} = 0; \quad T_3 \cdot \cos 45^\circ + T_4 \cdot \cos 45^\circ - Q = 0.$$

Решая уравнения получаем:

$$T_3 = T_4 = \frac{Q}{2 \cos 45^\circ} = 3,53 \text{ кН}.$$

К узлу A приложены силы $\bar{T}_1, \bar{T}_3, \bar{S}$, где $\bar{T}_1$ – усилие в тросе AO, а $\bar{S}$ – усилие в бруске AB. Эти силы также образуют плоскую систему сходящихся сил, для которой уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum_1^n F_{xk} = 0; \quad T_1 \cdot \cos 45^\circ + T_3 \cdot \cos 45^\circ + S = 0,$$

$$\sum_1^n F_{yk} = 0; \quad T_1 \cdot \cos 45^\circ - T_3 \cdot \cos 45^\circ - Q = 0.$$

Решив систему уравнений, получаем:

$$S = -10 \text{ кН}; \quad T_1 = 10,6 \text{ кН}.$$

Знак минус для усилия S означает, что в действительности оно направлено в противоположную сторону направлению, показанному на рисунке. В силу симметрии узлов A и B заключаем, что $T_2 = T_1$.

1.2. УПРАЖНЕНИЯ

1.2.1. Котел с равномерно распределенным по длине весом $P = 4$ т и радиусом $R = 1$ м лежит на выступах каменной кладки (рис. 13). Расстояние между стенками кладки $l = 1,6$ м. Пренебрегая трением, найти давление котла на кладку в точках А и В.

Ответ: $N_A = N_B = 3,33$ т.

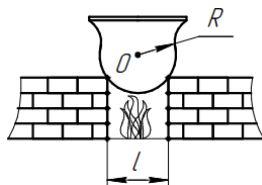


Рис. 13

1.2.2. Определить угол φ наклона ленты транспортера (рис. 14) для транспортировки мешков с зерном, если статический коэффициент трения скольжения мешковины о ленту транспортера равен 0,6.

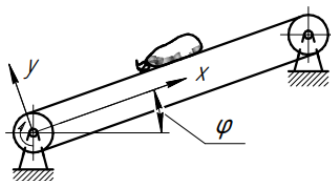


Рис. 14

Ответ: $\varphi = 30^\circ 58'$.

1.2.3. В двигателе внутреннего сгорания площадь поршня равна 200 см^2 , длина шатуна $AB = 30$ см, длина кривошипа $BC = 6$ см (рис. 15). Давление газа в данный момент за поршнем равно $P_1 = 1$ МПа, перед поршнем $P_2 = 0,2$ МПа. Найти силу T , действующую со стороны шатуна AB на кривошип BC , вызванную перепадом давлений газа, если угол $ABC = 90^\circ$. Трением между поршнем и цилиндром пренебречь.

Ответ: $T = 16$ кН.

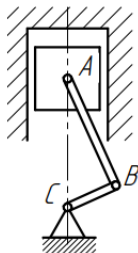


Рис. 15

1.2.4. Электрический провод ACB натянут между двумя столбами так, что образует пологую кривую, величина провисания которой $CD = 1$ м (рис. 16). Расстояние между столбами $AB = l = 40$ м. Вес провода $Q = 0,4$ кН. Определить натяжения провода: T_C в средней точке, T_A и T_B на концах.

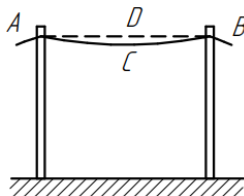


Рис. 16

При решении задачи считать, что вес каждой половины провода приложен на расстоянии $1/2$ от ближайшего столба.

Ответ: $T_C = 2$ кН; $T_A = T_B = 2,01$ кН.

1.2.5. Оконная рама AB , изображенная на рисунке 17 в разрезе, может вращаться вокруг горизонтальной оси шарнира A и своим нижним краем B свободно опирается на уступ паза.

Найти реакции опор, если дано, что вес рамы, равный 89 Н, приложен к середине C рамы и $AD = BD$.

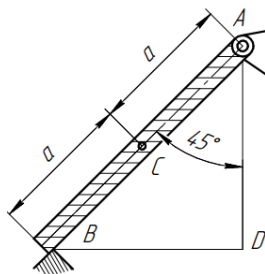


Рис. 17

Ответ: $R_A = 70,4 \text{ Н}$, $R_B = 31,5 \text{ Н}$.

1.2.6. Определить усилия T в стержнях DB, DC и DA треноги крепления тали (рис. 18) при подъеме двигателя весом 55 кН, если углы между стержнями треноги и горизонтальной плоскостью равны 60° и таль установлена так, что канат DK проходит через центр шарнира D.

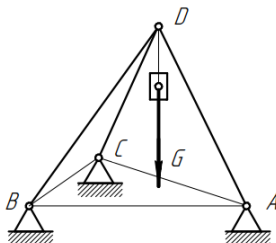


Рис. 18

1.2.7. Угловой столб AC поддерживает воздушный кабель, расположенный в горизонтальной плоскости (рис. 19). Натяжение ветвей кабеля $F = 5 \text{ кН}$. Определить усилия в оттяжках AE и AB и усилие в столбе AC, пренебрегая его весом и считая крепления шарнирными.

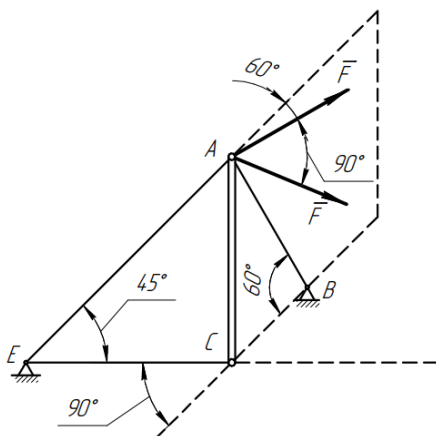


Рис. 19

Ответ: $S_{CA} = 10 \text{ кН}$; $S_{BA} = 3,65 \text{ кН}$; $S_{EA} = 9,67 \text{ кН}$.

1.2.8. Для определения положения центра тяжести плуга к его раме в трех точках прикрепили тросы и подвесили плуг в неподвижной точке так, чтобы верхняя плоскость рамы была горизонтальной. Затем в этой же неподвижной точке прикрепили один конец нити, а к другому подвесили отвес, показывающий центр тяжести плуга (рис. 20).

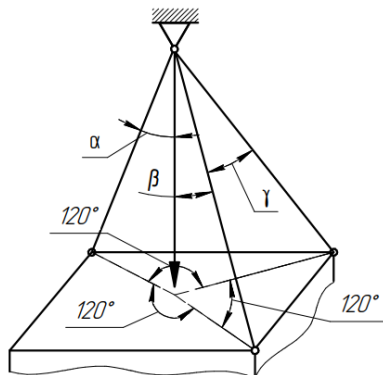


Рис. 20

Зная, что углы между проекциями тросов на горизонтальную плоскость рамы составляют 120° , а углы между тросами и вертикалью соответственно равны α , β и γ , определить усилия S_1 , S_2 и S_3 в тросах, если вес плуга Q .

Ответ:

$$S_1 = \frac{Q \sin \beta \sin \gamma}{\sin \gamma \sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cos \gamma};$$

$$S_2 = \frac{Q \sin \alpha \sin \gamma}{\sin \gamma \sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cos \gamma};$$

$$S_3 = \frac{Q \sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma \sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cos \gamma}.$$

Вопросы для самоконтроля

Какая система сил называется сходящейся?

Как определяется направление равнодействующей силы у сходящейся системы сил?

Каковы аналитические условия (уравнения) равновесия плоской системы сходящихся сил?

Как формулируется план решения задач статики на равновесие тел?

Как формулируется теорема о равновесии под действием трёх непараллельных сил?

Каковы аналитические условия (уравнения) равновесия пространственной системы сходящихся сил?

ГЛАВА 2. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Системой параллельных сил называется несколько действующих на твёрдое тело сил, линии действия которых, параллельны. Условием равновесия системы параллельных сил является то, что равнодействующая этой системы сил равна нулю.

Для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций сил на ось, параллельную силам, например, ось x , и сумма моментов сил относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю:

$$\sum_1^n F_{xk} = 0; \quad \sum_1^n M_A(\vec{F}_k) = 0.$$

Уравнения равновесия могут быть записаны и в другой форме:

$$\sum_1^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_1^n M_B(\vec{F}_k) = 0.$$

т. е. суммы моментов сил относительно двух произвольно выбранных центров, например, A и B , лежащих в плоскости действия сил, должны быть равны нулю. При этом точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной линиям действия сил системы.

Момент силы F относительно точки $A - M_A(\vec{F})$ равен произведению модуля силы F на плечо h , взятому со знаком плюс или минус.

$$M_A(\vec{F}) = \pm F \cdot h,$$

где h (плечо силы) – это длина перпендикуляра (кратчайшее расстояние), опущенного из центра момента на линию действия силы. Момент считается положительным, если сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, и отрицательным – по часовой стрелке (рис. 21).



Рис. 21

При составлении уравнений равновесия в качестве центра момента рационально выбирать точку, через которую проходят большее количество **линий действия неизвестных сил**. В этом случае моменты этих сил равны нулю и решение уравнений равновесия получается математически проще.

Для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций сил на ось, параллельную силам,

и суммы их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю:

$$\sum_1^n F_{xk} = 0; \quad \sum_1^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_1^n M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Для нахождения момента силы относительно оси (z) следует спроецировать силу на плоскость, перпендикулярную оси (xy), и взять момент полученной проекции силы (F_{xy}) относительно точки пересечения оси с плоскостью (O), в которой лежит полученная проекция (рис. 22).

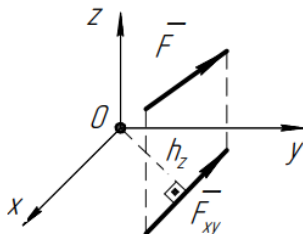


Рис. 22

$$M_z(F) = +F_{xy} \cdot h_z$$

Момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с положительного конца оси видится, что сила стремится повернуть тело против движения часовой стрелки, а отрицательным – если по движению часовой стрелки.

При решении задач следует учитывать, что число неизвестных сил, в том числе реакций связей, не должно превышать числа уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы сил. Так, например, если тело находится в равновесии под действием параллельных сил, то число неизвестных задачи в случае плоской системы не должно превышать двух, а в случае пространственной системы – трех сил.

Две равные по модулю параллельные силы, направленные в противоположные стороны, образуют особую категорию систем сил, называемую парой сил $\{\vec{F}_1; \vec{F}_2\}$. Пара сил стремится придать движению тела вращательный характер и равнодействующей силы не имеет. Момент пары сил равен произведению одной из сил пары на ее плечо, т. е. на кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару (рис. 23). Знак момента пары выбирается аналогично знаку момента силы относительно точки.

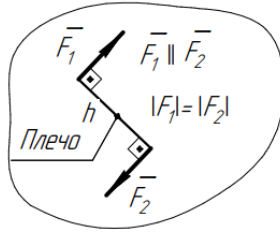


Рис. 23

Условием равновесия плоской системы пар является равенство нулю алгебраической суммы моментов пар сил:

$$\sum_1^n M_k = 0.$$

Если в равновесии находится система пар, расположенных в различных плоскостях, то условием равновесия является равенство нулю геометрической суммы векторов-моментов пар сил:

$$\sum_1^n \vec{M}_k = 0.$$

Пример. «Определение реакций почвы на передние и задние колеса неподвижного трактора»

Обозначим нормальные реакции почвы на ведущие колеса – $\vec{N}_A$ и ведомые колеса – $\vec{N}_B$, трактора, стоящего на горизонтальной площадке (рис. 24). Вес трактора $\vec{G}$ приложен в его центре тяжести (точке C), отстоящей от оси у на расстоянии a . Продольная база трактора равна L .

Действующие на трактор силы образуют плоскую систему параллельных сил. Запишем для нее уравнения равновесия в виде:

$$\begin{aligned} \sum_1^n F_{y_k} &= N_A + N_B - G = 0; \\ \sum_1^n M_A(\vec{F}_k) &= N_B \cdot L - G \cdot a = 0, \end{aligned}$$

откуда найдём искомые реакции почвы на колеса трактора

$$N_A = G \frac{L-a}{L}; \quad N_B = G \frac{a}{L}.$$

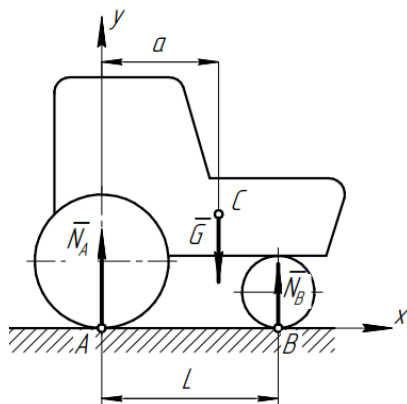


Рис. 24

Пример. «Определение боковой реакции почвы при работе уборочного агрегата»

При работе несимметричных уборочных агрегатов (жатки, сенокосилки), в случае их прямолинейного и равномерного движения, действующие на агрегат сила тяги $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{R}$, которая смещена относительно линии действия силы тяги на расстояние l (рис. 25), образуют пару сил, стремящуюся перевернуть машину по часовой стрелке.

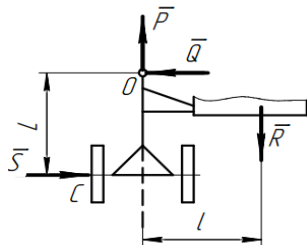


Рис. 25

Вследствие этого возникают реакция почвы на колеса агрегата, а также сила $\vec{Q}$ в точке присоединения машины к трактору.

Равномерное и прямолинейное движение агрегата возможно лишь в том случае, когда на него действует уравновешенная система сил. Так как пару

сил можно уравновесить только парой, то, следовательно, силы $\bar{S}$ и $\bar{Q}$, также как $\bar{P}$ и $\bar{R}$, образуют пару сил. Для равновесия этой плоской системы пар необходимо, чтобы алгебраическая сумма их моментов равнялась нулю:

$$M(\bar{P}, \bar{R}) + M(\bar{S}, \bar{Q}) = 0.$$

Так как $M(\bar{P}, \bar{R}) = -P \cdot l$ и $M(\bar{S}, \bar{Q}) = S \cdot L$,

где L – расстояние от точки O прицепа до оси колес машины, то

$$S \cdot L - P \cdot l = 0.$$

Отсюда величина боковой реакции грунта равна:

$$S = \frac{P \cdot l}{L}.$$

Какой величины достигнут нагрузки на колеса самоходного шасси, если на него навесить культиватор весом $P = 3,73$ кН? Известно, что при навеске культиватора расстояние по горизонтали от центра тяжести агрегата C до оси ведущих колёс шасси составляет $l = 52$ см. Вес шасси $G = 16,4$ кН, его база $L = 2,15$ м (рис. 26).

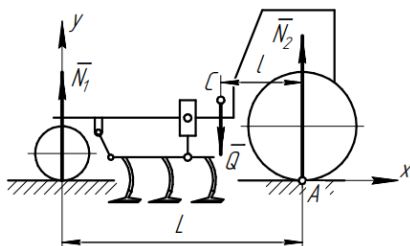


Рис. 26

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим равновесие всего агрегата, общий вес которого, приложенный в точке C , равен $Q = P + G = 20,13$ кН.

Изобразим реакции почвы N_1 и N_2 на передние и задние колеса самоходного шасси, равные и противоположные нагрузкам на колеса. Для полученной плоской системы параллельных сил составляем уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{y_k} = N_1 + N_2 - Q = 0; \quad (3.3)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = -N_1 \cdot L - Q \cdot l = 0. \quad (3.4)$$

Из решения (3.4) находим величину реакции почвы на передние колёса:

$$N_1 = \frac{Q \cdot l}{L} = 4,87 \text{ кН}.$$

Подставив полученное значение в уравнение (3.3), найдем реакцию почвы на задние колеса:

$$N_2 = Q - N_1 = 15,26 \text{ кН}.$$

2.2. УПРАЖНЕНИЯ

2.2.1. Горизонтальная балка заделана одним концом в стену, а на другом конце поддерживает подшипник вала (рис. 27). От веса вала, шкивов и подшипника балка испытывает вертикальную нагрузку Q , равную 120 кГ. Пренебрегая весом балки и считая, что нагрузка Q действует на расстоянии $a = 750$ мм от стены, определить реакции заделки.

Ответ: Реакция $R = 120$ кГ; реактивный момент $M = 90$ кГм.

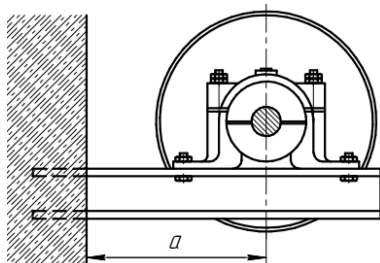


Рис. 27

2.2.2. На мосту длиной 20 м находится грузовой автомобиль с нагрузкой на переднюю ось 10 кН и на заднюю 20 кН. Расстояние между осями автомобиля 2,5 м. Определить расстояние от опоры моста до оси задних колес, при котором давления на опоры моста будут одинаковы.

Ответ: $9\frac{1}{6}$ м.

2.2.3. При расчете на изгиб поршневой палец рассматривается как балка, свободно лежащая на двух опорах (рис. 28).

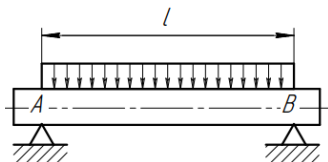


Рис. 28

Определить реакции опор, принимая нагрузку интенсивностью q равномерно распределенной по длине l и расположенной симметрично относительно опор. Весом пальца пренебречь.

Ответ: $R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2}$.

2.2.4. Водонапорная башня состоит из цилиндрического резервуара высоты 6 м и диаметра 4 м, укрепленного на четырех симметрично расположенных столбах, наклонных к горизонту (рис. 29). Дно резервуара находится на высоте 17 м над уровнем опор; вес башни 80 кН; давление ветра рассчитывается на площадь проекции поверхности резервуара на плоскость, перпендикулярную направлению ветра, причем удельное давление ветра принимается равным 1,25 кПа.

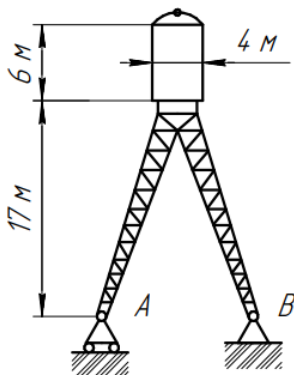


Рис. 29

Определить необходимое расстояние AB между основаниями столбов. Расстояние AB должно быть рассчитано на опрокидывание давлением ветра при горизонтальном его направлении.

Ответ: $AB \geq 15$ м.

2.2.5. При упрощенном способе расчета на изгиб шатуна двигателя внутреннего сгорания шатун рассматривается как балка, лежащая на двух опорах (рис. 30) и нагруженная нагрузкой, распределенной по закону треугольника.

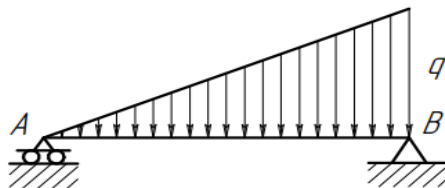


Рис. 30

Определить реакции опор, если наибольшая интенсивность нагрузки равна q , а длина шатуна l . Весом шатуна пренебречь.

Ответ: $R_A = \frac{q \cdot l}{6}$; $R_B = \frac{q \cdot l}{3}$.

2.2.6. Предохранительный клапан А парового котла соединен стержнем АВ с однородным рычагом CD длины 50 см и веса 10 Н, который может вращаться вокруг неподвижной оси С (рис. 31); диаметр клапана $d = 6$ см, плечо $BC = 7$ см.

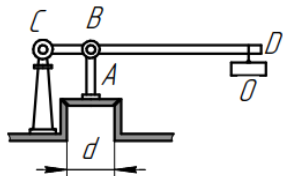


Рис. 31

Какой груз Q нужно подвесить к концу D рычага для того, чтобы клапан сам открывался при давлении в котле, равном 1100 кПа?

Ответ: $Q = 430$ Н.

2.2.7. На трактор весом $G_1 = 16$ кН навешен погрузчик весом $G_2 = 2,2$ кН (рис. 32).

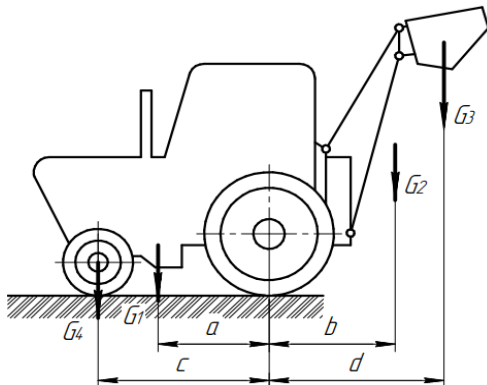


Рис. 32

Определить силу тяжести дополнительных противовесов G_4 , установленных на передней оси, если ковш погрузчика грузоподъемностью $G_3 = 3,2$ кН находится в наиболее удаленном от трактора положении. Нор-

мальная реакция почвы на передние колеса равна 2,5 кН. Размеры a, b, c и d равны соответственно 725; 1200; 1775 и 1900 мм.

2.2.8. Несколько одинаковых однородных плит длиной $2l$ сложены так, что часть каждой плиты выступает над плитой нижележащей (рис. 33). Определить предельные длины выступающих частей, при которых плиты будут находиться в равновесии.

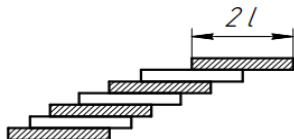


Рис. 33

При решении задачи складываются последовательно веса плит, начиная с верхней.

Ответ: $l, \frac{1}{2}l, \frac{1}{3}l, \frac{1}{4}l, \dots, \frac{1}{n}l$.

2.2.9. Грузовой кран опирается на рельсы, расстояние между которыми равно 1,5 м. Вес тележки крана равен 30 кН, центр тяжести ее находится в точке A , лежащей на линии KL пересечения плоскости симметрии тележки с плоскостью рисунка 34. Вес лебедки B крана равен 10 кН, центр тяжести ее лежит в точке C на расстоянии 0,1 м от прямой KL . Вес противовеса D равен 20 кН, центр тяжести его лежит в точке E на расстоянии 1 м от прямой KL .

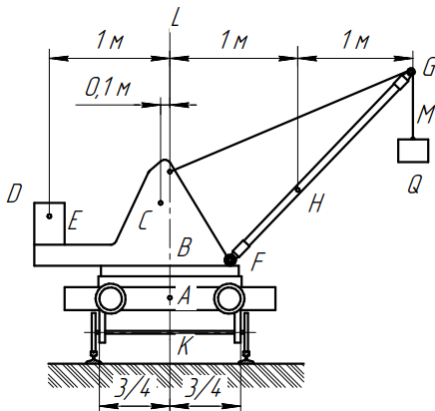


Рис. 34

Вес укосины FG равен 5 кН , и центр тяжести ее находится в точке H на расстоянии 1 м от прямой KL . Вылет крана $LM = 2 \text{ м}$. Определить наибольший груз Q , который не опрокинет крана.

Ответ: $Q = 51,8 \text{ кН}$.

2.2.10 Центр тяжести передвижного рельсового крана, вес которого (без противовеса) равен $P_1 = 500 \text{ кН}$, находится в точке C , расстояние которой от вертикальной плоскости, проходящей через правый рельс (рис. 35), равно $1,5 \text{ м}$. Крановая тележка рассчитана на подъем груза $P_2 = 250 \text{ кН}$; вылет ее равен 10 м .

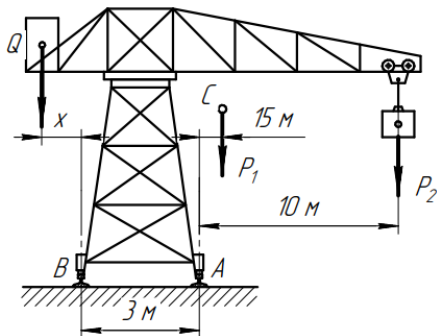


Рис. 35

Определить наименьший вес Q и наибольшее расстояние x центра тяжести противовеса от вертикальной плоскости, проходящей через левый рельс B так, чтобы кран не опрокинулся при всех положениях тележки как нагруженной, так и ненагруженной. Собственным весом тележки пренебречь.

Ответ: $Q = 333 \text{ кН}$, $x = 6,75 \text{ м}$.

2.2.11. Подъемный кран установлен на каменном фундаменте. Вес крана $Q = 25 \text{ кН}$ и приложен в центре тяжести A на расстоянии $AB = 0,8 \text{ м}$ от оси крана; вылет крана $CD = 4 \text{ м}$ (рис. 36). Фундамент имеет квадратное основание, сторона которого $EF = 2 \text{ м}$; удельный вес кладки 20 кН/м^3 .

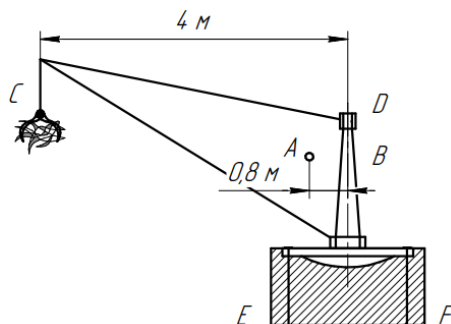


Рис. 36

Вычислить наименьшую глубину фундамента, если кран предназначен для подъема тяжестей до 30 кН, причем фундамент должен быть рассчитан на опрокидывание вокруг ребра F.

Ответ: 1,06 м.

Вопросы для самоконтроля

Как определяется момент силы относительно точки на плоскости?

Когда момент силы относительно точки считать положительным?

Когда момент силы относительно точки считать отрицательным?

Запишите условия (уравнения) равновесия произвольной плоской системы сил.

В чём состоит условие равновесия сил, приложенных к рычагу?

Что называется коэффициентом устойчивости?

Каковы условия равновесия пространственной системы параллельных сил?

ГЛАВА 3. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Произвольная система сил представляет собой наиболее сложную совокупность действующих на твердое тело сил, линии действия, которых расположены как угодно в плоскости или пространстве. Произвольная система сил эквивалентна системе, состоящей из одной силы – главного вектора и одной пары сил, момент которой равен главному моменту системы, относительно произвольно выбранного центра. Главный вектор равен геометрической сумме сил системы, а главный момент – алгебраической (плоская система сил) или геометрической (пространственная система сил) сумма моментов сил относительно произвольно выбранного центра.

Условиями равновесия произвольной системы сил являются равенство нулю главного вектора и главного момента. Уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил могут быть записаны в одной из трех форм:

$$1. \sum_1^n F_{xk} = 0; \quad \sum_1^n F_{yk} = 0; \quad \sum_1^n M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где точка А – любой центр, лежащий в плоскости действия сил.

$$2. \sum_1^n F_{xk} = 0; \quad \sum_1^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_1^n M_B(\vec{F}_k) = 0,$$

где точки А и В не лежат на прямой, перпендикулярной оси Х.

$$3. \sum_1^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_1^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_1^n M_C(\vec{F}_k) = 0,$$

где точки А, В и С не лежат на одной прямой.

Ту или иную форму уравнений равновесия следует выбирать с учётом достижения наибольшей простоты решения полученных уравнений.

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил системы на три взаимно перпендикулярные оси и суммы моментов сил относительно этих осей были равны нулю:

$$\sum_1^n F_{xk} = 0; \quad \sum_1^n F_{yk} = 0; \quad \sum_1^n F_{zk} = 0;$$
$$\sum_1^n M_X(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_1^n M_Y(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_1^n M_Z(\vec{F}_k) = 0.$$

Положение координатных осей рекомендуется выбирать таким образом, чтобы линия действия неизвестной силы или силы, момент которой определяется сложно, была параллельна какой-нибудь оси или пересекала ее, так как при этом момент силы относительно оси равен нулю. В ряде случаев

облегчает нахождение момента силы относительно оси применение теоремы Вариньона, согласно которой момент равнодействующей относительно какой-либо оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси:

$$M_x(\vec{R}) = \sum_1^n M_x(\vec{F}_k).$$

Для применения этой теоремы силу, момент которой относительно оси нужно определить, раскладывают на составляющие, одна из которых параллельна оси, а две другие перпендикулярны. Нахождение моментов этих составляющих обычно труда не составляет.

Пример. «Определение силы сопротивления почвы при движении сошника»

Посевные машины оборудуются сошниками, основное назначение которых состоит в образовании бороздок в почве, укладке семян на дно и заделке их почвой.

При прямолинейном и равномерном движении сошника на него кроме собственного веса $\vec{G}$ действует в точке O подвеса тяговое усилие $\vec{F}$, а также сила сопротивления почвы $\vec{R}$ (рис. 37).

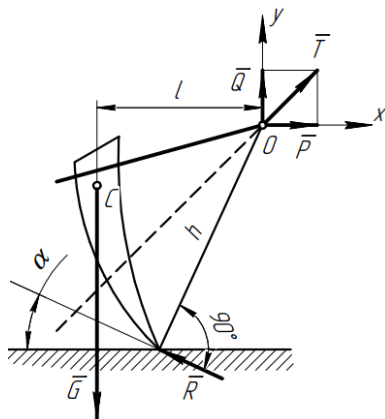


Рис. 37

Обозначим вертикальную и горизонтальную составляющие тягового усилия соответственно через $\bar{Q}$ и $\bar{P}$. Рассмотрим равновесие сошника с по-

водком под действием произвольной плоской системы сил $\{\bar{G}, \bar{Q}, \bar{P}, \bar{R}\} \Leftrightarrow 0$ и составим для неё уравнения равновесия в виде:

$$\begin{aligned} \sum_1^n F_{xk} &= 0; & P - R \cdot \cos \alpha &= 0; \\ \sum_1^n F_{yk} &= 0; & Q - G + R \cdot \sin \alpha &= 0; \\ \sum_1^n M_o(\bar{F}_k) &= 0; & G \cdot l - R \cdot h &= 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений найдем величину силы сопротивления почвы, а также ее направление, определяемое углом α :

$$R = \sqrt{P^2 + (G - Q)^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{G - Q}{P}.$$

С помощью уравнения моментов можно найти плечо h силы сопротивления $\bar{R}$ почвы относительно точки подвеса сошника: $h = \frac{G \cdot l}{R}$.

3.1.1. Коленчатый вал (рис. 38) может вращаться в подшипниках А и В. На него действует сила $\bar{P}$, равная 30 кН, направленная под углом $\alpha = 10^\circ$ к вертикали и лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вала.

Определить момент M пары сил, которую следует приложить к валу для его равновесия, а также реакции подшипников А и В, если плоскость $DEGF$ образует с горизонтальной плоскостью угол $\varphi = 60^\circ$, $DE = 20$ см, $FB = AD = FD = 40$ см. Весом вала пренебречь.

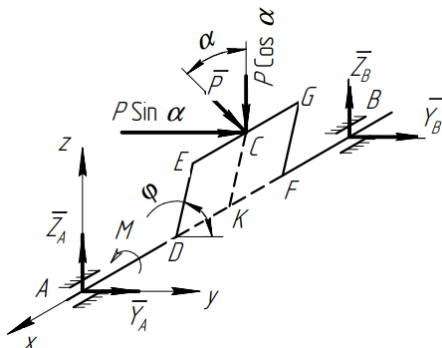


Рис. 38

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим равновесие коленчатого вала. Изобразим активную силу $\bar{P}$, составляющие реакций подшипников $\bar{Y}_A, \bar{Y}_B, \bar{Z}_A, \bar{Z}_B$, а также

момент M пары сил. Как видно, коленчатый вал находится в равновесии под действием произвольной пространственной системы сил, для которой составим шесть уравнений равновесия в выбранной системе координатных осей:

$$\sum_1^n F_{xk} = 0; \quad (4.1)$$

$$\sum_1^n F_{yk} = 0; \quad Y_A + Y_B + P \cdot \sin \alpha \quad (4.2)$$

$$\sum_1^n F_{zk} = 0; \quad Z_A + Z_B - P \cdot \cos \alpha \quad (4.3)$$

$$\sum_1^n M_o(\vec{F}_k) = 0; \quad M - P \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi \cdot DE - P \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi \cdot DE = 0; \quad (4.4)$$

$$\sum_1^n M_Y(\vec{F}_k) = 0; \quad Z_A \cdot AB - P \cdot \cos \alpha \cdot AK = 0; \quad (4.5)$$

$$\sum_1^n M_Z(\vec{F}_k) = 0; \quad -Y_B \cdot AB - P \cdot \sin \alpha \cdot AK = 0. \quad (4.6)$$

Для облегчения нахождения момента силы $\vec{P}$ относительно координатных осей применим теорему Вариньона. При этом силу $\vec{P}$ разложим на составляющие $P \cdot \sin \alpha$ и $P \cdot \cos \alpha$, параллельные осям y и z , и определим их моменты относительно осей.

Все действующие на коленчатый вал силы расположены в плоскостях, перпендикулярных оси X , поэтому уравнение (4.1) обращается в тождество. Из остальных пяти уравнений находим неизвестные реакции связей, а также величину момента пары.

$$\text{Из (4.6) найдем значение реакции } Y_B = -\frac{P \cdot \sin \alpha \cdot AK}{AB} = -2,61 \text{ кН}$$

и подставив его в (4.2), определим $Y_A = -Y_B - P \cdot \sin \alpha = -2,61 \text{ кН}$.

Из уравнений (4.3), (4.5) находим составляющие реакций подшипников, параллельные оси z :

$$Z_B = \frac{P \cdot \cos \alpha \cdot AK}{AB} = 14,8 \text{ кН}; \quad Z_A = P \cdot \cos \alpha - Z_B = 14,8 \text{ кН}.$$

Из (4.4) определяем величину момента уравновешивающей пары:

$$M = P \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \varphi + \cos \alpha \cdot \cos \varphi) \cdot DE = 3,86 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знаки минус у составляющих реакций подшипников, параллельных оси y , указывают на то, что эти силы в действительности направлены в противоположную сторону показанному на схеме.

3.1.2. Для опускания грузов в шахту употребляется ворот с тормозом, изображенный на рис. 39. С барабаном, на который намотана цепь, скреплено концентрическое деревянное колесо, которое тормозит, надавливая

на конец A рычага AB , соединенного цепью CD с концом D тормозного рычага ED . Диаметр колеса $a = 50$ см, диаметр барабана $b = 20$ см; $ED = 120$ см; $FE = 60$ см; $AB = 1$ м; $BC = 10$ см. Определить силу P , уравнивающую груз $Q = 800$ кГ, подвешенный к подвижному блоку, если коэффициент трения дерева о сталь $f = 0,4$; размерами колодки F пренебрегаем.

Ответ: $P = 20$ кГ.

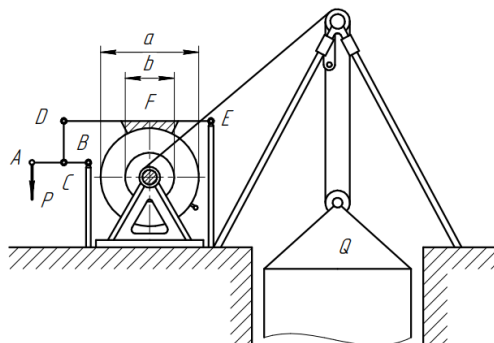


Рис. 39

3.2. ПРИМЕРЫ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Трением называется сопротивление, возникающее при скольжении или качении одного тела по поверхности другого. Силы трения направлены в сторону, противоположную той, куда тело стремится двигаться. Предельное значение силы трения скольжения имеет место при статическом трении, когда трущиеся тела находятся в покое, и определяется по формуле:

$$F_{TP} = f_{CT} \cdot N,$$

где f_{CT} – статический коэффициент трения,

N – величина нормального давления одного из трущихся тел на другое.

При наличии трения полная реакция поверхности отклоняется от нормали к соприкасающимся поверхностям на некоторый угол, который в случае предельной силы трения называется углом трения φ_{TP} . Тангенс угла трения равен статическому коэффициенту трения f_{CT} :

$$\operatorname{tg} \varphi_{TP} = f_{CT}.$$

Величина силы трения при качении определяется формулой:

$$F_{TP} = \frac{k}{R} \cdot N,$$

где k – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины в м,
 R – радиус катящегося тела,

N – нормальная реакция опорной поверхности. В теории трактора и автомобиля силу трения при качении называют силой сопротивления качению и определяют по формуле:

$$F_{TP} = f_k \cdot N,$$

где f_k – безразмерный коэффициент сопротивления качению.

Момент трения качения (момент сопротивления качению) равен:

$$M_{TP} = k \cdot N \text{ или } M_{TP} = f_k \cdot N \cdot R.$$

Методика решения задач статики при наличии трения остается такой же, как и в случае отсутствия трения, однако в уравнения равновесия, кроме активных сил и реакций связей, входят также силы трения. При этом расчет ведется, как правило, на предельную величину силы трения.

Пример. «Определение диаметра початкоотрывающих валцов кукурузоуборочного комбайна»

Для отрыва початков кукурузы от стеблей кукурузоуборочные комбайны оборудованы двумя вальцами, которые путем захвата и втягивания стеблей

отрывают от них початки. Вальцы диаметром D установлены с зазором h и вращаются навстречу друг другу (рис. 40).

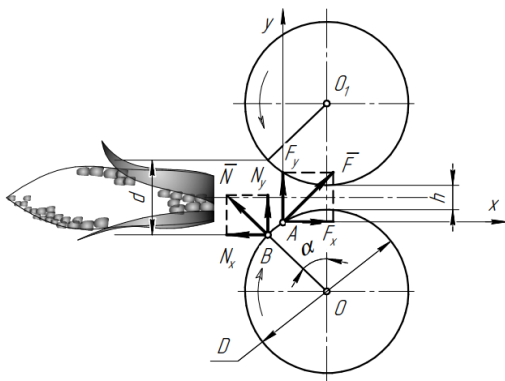


Рис. 40

Стебель диаметром d подается с некоторым усилием в рабочее русло вальцов, благодаря чему в точке контакта возникают реакция $\bar{N}$ и сила трения скольжения $\bar{F}$. Стебель будет захватываться вальцами, если проекция силы трения на направление движения (ось x) будет больше проекции реакции N , т. е. $F_x > N_x$, или $F \cdot N \cdot \cos \alpha > N \cdot \sin \alpha$, где α – угол захвата,

f – коэффициент трения между стеблем и поверхностью вальца.

Учитывая, что:

$$f = \tan \varphi_{\text{тр}},$$

где $\varphi_{\text{тр}}$ – угол трения, получим:

$$\tan \varphi_{\text{тр}} > \tan \alpha \text{ или } \varphi_{\text{тр}} > \alpha \quad (4.7)$$

Таким образом, захват стебля вальцами возможен в том случае, если угол захвата α меньше угла трения $\varphi_{\text{тр}}$. Диаметр вальцов D найдём в зависимости от диаметра стебля d и зазора h из следующих соображений:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OB},$$

$$\text{Где } OA = \frac{D}{2} + \frac{h}{2} - \frac{d}{2}; OB = \frac{D}{2}.$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha = 1 - \frac{d-h}{D}.$$

$$\text{На основании (4.7) можно записать, что } \cos \varphi_{\text{тр}} < \cos \alpha; \cos \varphi_{\text{тр}} < 1 - \frac{d-h}{D},$$

откуда $D > \frac{d - h}{1 - \cos \varphi_{TP}}$.

Пример. «Определение реакций почвы на передние и задние колеса движущегося трактора»

Рассмотрим случай, когда трактор без прицепа движется равномерно на подъеме под углом α к горизонту (рис. 41).

При прямолинейном движении трактора на него действуют в продольной плоскости следующие силы:

- 1) вес трактора $\bar{G}$, приложенный в его центре тяжести точке C ;
- 2) нормальные реакции почвы: $\bar{Y}_1$ – на ведущие колёса, $\bar{Y}_2$ – ведомые. Реакция $\bar{Y}_1$ смещена на расстояние a_1 , а реакция $\bar{Y}_2$ – на расстояние a_2 от прямых, проведенных через оси соответствующих колес перпендикулярно их опорной поверхности;
- 3) реакции почвы, параллельные поверхности дороги: действующая по направлению движения толкающая сила $\bar{X}_1$ ведущих колес, являющаяся движущей (известной) силой, и реакция $\bar{X}_2$, представляющая собой, в основном, силу трения между ведомым колесом и поверхностью дороги.

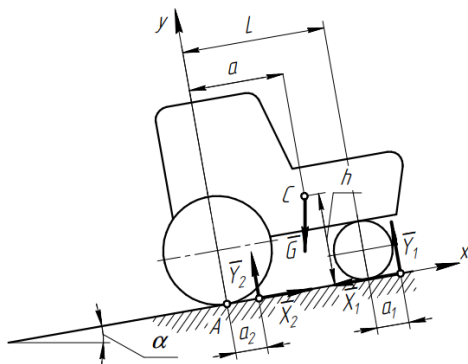


Рис. 41

Так как движение трактора является прямолинейным и равномерным, то на основании аксиомы инерции статики действующую на трактор произвольную плоскую систему активных сил и реакций связей следует считать

уравновешенной. Составим для этой системы сил уравнения равновесия в виде:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{xk} &= 0; & X_1 - X_2 - G \cdot \sin \alpha &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{yk} &= 0; & Y_2 - G \cdot \cos \alpha + Y_1 &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_Z(\vec{F}_k) &= 0; & Y_2(L + a_2) + Y_1 \cdot a_1 + G \cdot h \cdot \sin \alpha - G \cdot a \cdot \cos \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Учитывая, что произведения $Y_1 \cdot a_1$ и $Y_2 \cdot a_2$ есть моменты сопротивления качению ведущих и ведомых колес, а их сумма представляет собой момент сопротивления качению M_{TP} всего трактора, из уравнений равновесия получим выражения для искомых реакций почвы:

$$Y_1 = \frac{G \cdot \cos \alpha (L - a) + G \cdot h \cdot \sin \alpha + M_{TP}}{L}; \quad (4.7)$$

$$Y_2 = \frac{G(a \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha) - M_{TP}}{L}; \quad (4.8)$$

$$X_2 = X_1 - G \cdot \sin \alpha. \quad (4.9)$$

3.2.1. Колесный трактор весом $G = 29,4$ кН равномерно движется по горизонтальному участку поля, представляющему собой стерню из под озимой ржи, на которой коэффициент сопротивления качению $f_k = 0,08$. Определить нормальные реакции почвы на передние $\bar{Y}_2$ и задние $\bar{Y}_1$ колеса трактора, а также сравнить их с величинами статических реакций на колеса неподвижного трактора. Продольная база трактора $L = 2,45$ м; продольная и вертикальная координаты центра тяжести трактора соответственно равны $a = 0,82$ м и $h = 0,90$ м. Момент сопротивления качению трактора $M_{TP} = f_k \cdot G \cdot r_1$, где $r_1 = 0,74$ м – радиус ведущих колес (см. рис. 39).

РЕШЕНИЕ. Реакции почвы на колеса движущегося трактора находим по формулам (4.7) и (4.8), которые применительно к заданным условиям ($\alpha = 0^\circ$) имеют вид

$$Y_1 = \frac{G \cdot (L - a) + M_{TP}}{L} = \frac{29,4(2,45 - 0,82) + 0,08 + 29,4 \cdot 0,74}{2,45} = 20,2 \text{ кН}.$$

$$Y_2 = \frac{G \cdot a - M_{TP}}{L} = \frac{29,4 \cdot 0,82 - 0,08 + 29,4 \cdot 0,74}{2,45} = 9,13 \text{ кН}.$$

Значения статических реакций почвы находим из формул (3.1) и (3.2):

$$Y_1 = G \cdot \frac{L - a}{L} = 2,94 \frac{2,45 - 0,82}{2,45} = 19,6 \text{ кН}.$$

$$Y_2 = G \frac{a}{L} = 29,4 \cdot \frac{0,82}{2,45} = 9,84 \text{ кН}.$$

Как видно, при движении трактора нагрузка на задние колеса возрастает, на передние – уменьшается.

3.2.2. Лестница AB весом P упирается в гладкую стену и опирается на горизонтальный негладкий пол. Коэффициент трения лестницы о пол равен f . Под каким углом α к полу надо поставить лестницу (рис. 42), чтобы по ней мог подняться доверху человек, вес которого P ?

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{P+2p}{2f(P+p)}$.

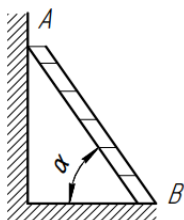


Рис. 42

3.2.3. Определить силу T , необходимую для перемещения инструментальной плиты D по блоку двигателя B при проверке его поверхности после шлифовки, если известно, что коэффициент трения $f=0,15$, вес плиты $G=100$ Н, а сила T направлена под углом $\alpha=30^\circ$ к направлению перемещения так, что линия ее действия и линия силы тяжести плиты пересекаются в точке A (рис. 43).

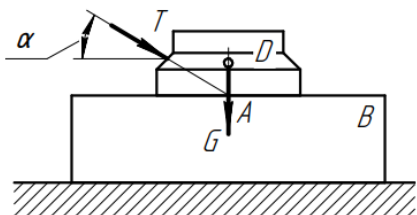


Рис. 43

3.2.3. Под каким углом α наклона к горизонту надо установить полотняную горку (рис. 44), чтобы разделить на ней смесь семян двух различных культур, если коэффициент трения семян одной культуры составляет 0,6, а другой 0,8?

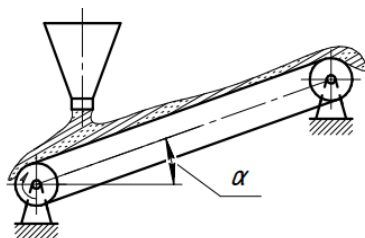


Рис. 44

Ответ: $30^{\circ}58' < \alpha < 38^{\circ}39'$.

3.2.4. Определить усилия T в стержнях DB , DC и DA треноги крепления тали (рис. 45) при подъеме двигателя весом 55 кН , если углы между стержнями треноги и горизонтальной плоскостью равны 60° и таль установлена так, что канат DK проходит через центр шарнира D .

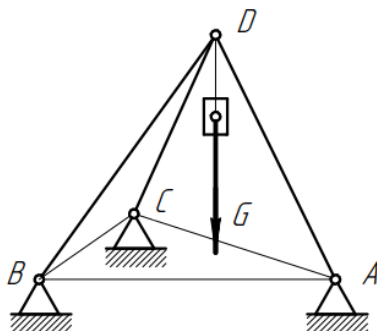


Рис. 45

3.2.5. Лестница AB опирается на негладкую стену и негладкий пол, составляя с последним угол 60° . На лестнице помещается груз P (рис. 46). Пренебрегая весом лестницы, определить графически наибольшее расстояние BP , при котором лестница остается в покое. Угол трения для стены и пола равен 15° .

Ответ: $BP = \frac{1}{2}AB$.

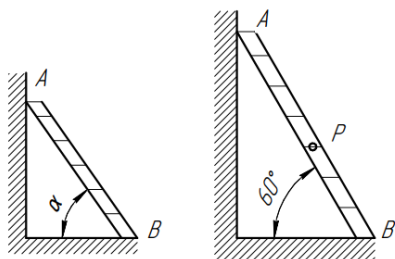


Рис. 46

3.2.6. Блок радиуса R снабжен двумя шипами радиуса r , симметрично расположенными относительно его средней плоскости. Шипы опираются на две цилиндрические поверхности AB с горизонтальными образующими (рис. 47). На блок намотан трос, к которому подвешены грузы P и P_1 , причем $P > P_1$. Определить наименьшую величину груза P_1 , при которой блок будет находиться в равновесии, предполагая, что коэффициент трения шипов о цилиндрические поверхности AB равен f , а вес блока с шипами Q .

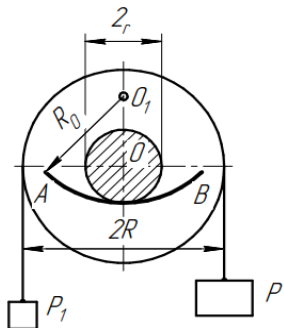


Рис. 47

Указанное на чертеже положение системы не может быть положением равновесия; последнее требуется предварительно найти.

Ответ: В положении равновесия плоскость, проходящая через оси цилиндра AB и блока, образует с вертикалью угол, равный углу трения;

$$P_1 = \frac{P(R\sqrt{1+f^2} - fr) - frQ}{R\sqrt{1+f^2} + fr}.$$

3.3. ПРИМЕРЫ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА РАВНОВЕСИЕ РЫЧАГА И ОПРОКИДЫВАНИЕ

Рычагом называется твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси под действием сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной этой оси. Точка пересечения плоскости действия сил с осью вращения называется точкой опоры рычага. Для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов всех приложенных к рычагу сил относительно точки O его опоры равнялась нулю:

$$\sum_1^n M_o(\vec{F}_k) = 0. \quad (4.10)$$

При решении задач на опрокидывание рассматривается предельное положение тела, в котором оно находится в состоянии неустойчивого равновесия. При этом тело, которое может опрокидываться вокруг неподвижной оси, можно рассматривать как рычаг и, следовательно, условием равновесия такого тела является условие равновесия рычага.

Составляя уравнение (4.10), следует учитывать, что реакции опор в это уравнение не входят, так как в случае предельного положения тело опирается только на те опоры, через которые проходит ось опрокидывания.

Коэффициентом устойчивости при опрокидывании принято определять отношением величины удерживающего момента M_{yo} к величине опрокидывающего момента $M_{опр}$.

$$k = \frac{M_{yo}}{M_{опр}}.$$

В случае устойчивого равновесия $k > 1$.

Пример. «Определение усилия сжатия пружины предохранителя тракторного плуга»

Для предотвращения поломок корпуса плуга при резком увеличении сопротивления почвы на плугах устанавливают индивидуальные пружинные предохранители, которые смягчают резкие колебания сил сопротивления за счет упругих деформаций пружин.

Нижняя часть корпуса плуга с отвалом, лемехом и полевой доской шарнирно в точке O соединена с верхней частью, жестко закреплённой на раме плуга (рис. 48, а). При наезде на препятствие нижняя часть корпуса поворачивается вокруг оси шарнира, отжимая верхним концом стойки 1 коромысло 2 с пружиной 3, и углубляясь из почвы, проходит над препятствием

Расчётное значение усилия $\bar{F}$ сжатия пружины можно найти, рассмотрев равновесие сочлененной системы: нижняя часть корпуса – коромысло при рабочем положении корпуса плуга. Оба эти тела являются рычагами, так как могут поворачиваться вокруг осей, проходящих соответственно через точки O и O_1 .

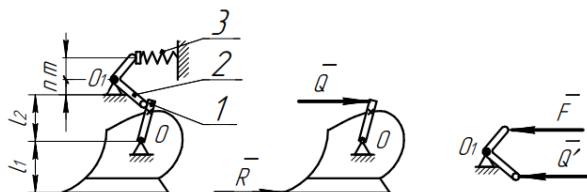


Рис. 48

Рассмотрим равновесие каждого из этих тел в отдельности. Условие равновесия нижней части корпуса плуга (рис. 48, б) имеет вид:

$$\sum_1^n M_O(\bar{F}_k) = 0 \quad R \cdot l_1 - Q \cdot l_2 = 0.$$

где R – сила сопротивления почвы,

Q – сила, с которой ролик коромысла воздействует на верхний конец стойки плуга.

Условие равновесия коромысла (рис. 48, в) запишем в виде:

$$\sum_1^n M_{O_1}(\bar{F}_k) = F \cdot m - Q' \cdot n = 0. \quad (4.12)$$

где $\bar{Q}' = -\bar{Q}$ – сила, с которой верхний конец стойки прижимается к ролику коромысла.

Определив из (4.11) силу Q и подставив ее значение в выражение (4.12), найдем расчетную формулу для усилия сжатия пружины:

$$F = R \frac{n \cdot l_1}{m \cdot l_2}.$$

Пример. «Поперечная устойчивость колесных и гусеничных тракторов»

При нахождении колесного или гусеничного трактора на дороге с поперечным уклоном может произойти его опрокидывание. Для проверки поперечной устойчивости трактора и определения предельного угла поперечного уклона, на котором он может стоять, не опрокидываясь, рассмотрим пре-

дельное положение, в котором трактор находится в состоянии неустойчивого равновесия.

В этом случае трактор можно считать рычагом, осью которого является нижняя боковая кромка (точка A) опорной поверхности ходовой части (рис. 49).

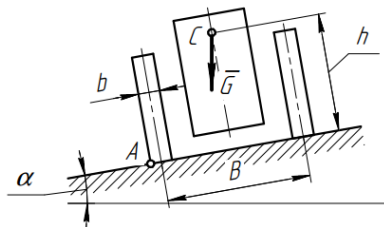


Рис. 49

Составим уравнение равновесия рычага в виде:

$$\sum_1^n M_A(\vec{F}_k) = 0. \quad Gh \sin \alpha - \frac{1}{2}(B+b)G \cos \alpha = 0,$$

где G – вес трактора, приложенный в центре его тяжести C ;

B – поперечная база трактора;

b – ширина гусеницы или колеса;

h – высота расположения центра тяжести трактора;

α – угол поперечного уклона,

из которого найдем предельное значение угла поперечного уклона:

$$\alpha_{\text{пред.}} = \arctg \frac{B+b}{2h}.$$

Задача. Грузовая автомашина весом $Q = 4,9$ кН с грузом $S = 14,7$ кН находится на дороге с поперечным уклоном (рис. 50). Высота на которой находится центр тяжести C_1 автомашины $h = 0,8$ м, высота расположения центра тяжести C_2 груза над полотном дороги $H = 2$ м. Расстояние между колесами $l = 1,72$ м. Определить максимально допустимый угол уклона дороги α , если запас устойчивости против опрокидывания должен быть равным $n = 1,5$.

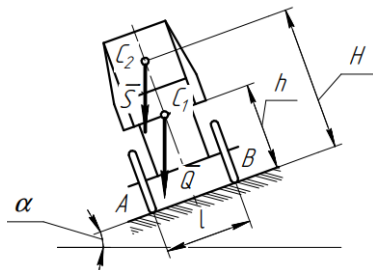


Рис. 50

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим предельное положение равновесия машины с грузом, считая их одним телом. Опрокидывание может произойти вокруг оси, проходящей через точку A, под действием составляющих сил тяжести машины и груза, параллельных полотну дороги. Момент, препятствующий опрокидыванию, создают составляющие сил $\bar{Q}$ и $\bar{S}$, лежащие в плоскости симметрии машины. По условию этот момент должен быть в 1,5 раза больше момента опрокидывания. С учетом этого составим уравнение равновесия в виде:

$$\sum_1^n M_A(\bar{F}_k) = 0. \quad Gh \sin \alpha - \frac{Q \cdot l}{2} \cos \alpha + \frac{S \cdot l}{2} \cos \alpha = 0,$$

из которого найдем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(Q+S) \frac{l}{2}}{n(Qh+S \cdot H)} = 0,337.$$

Соответствующий угол уклона дороги $\alpha = 18^\circ 36'$.

3.4. УПРАЖНЕНИЯ

3.4.1. На подъемной однородной лестнице длиной 6 м и весом 240 кГ, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси A и наклонена под углом 60° к горизонту, в точке D стоит человек весом 80 кГ на расстоянии 2 м от конца B (рис. 51). У конца B лестница поддерживается веревкой BC , наклоненной под углом 75° к горизонту. Определить натяжение T веревки и реакцию A оси.

Ответ: $T = 335$ кГ; $X_A = 86,7$ кГ; $Y_A = -3,44$ кГ.

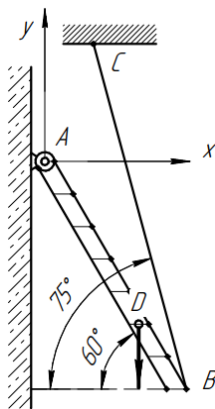


Рис. 51

3.4.2. В конце разгрузки кузов самосвала на рис. 52 занимает указанное положение. Определить усилие, развиваемое домкратом BE и реакцию неподвижного шарнира A , если вес кузова равен 8 кН и приложен в точке C , а вес оставшегося груза 6 кН приложен в точке C_1 . Размеры указаны на чертеже в миллиметрах.

Ответ: $R_B = 10$ кН; $X_A = -7,07$ кН; $Y_A = 6,93$ кН.

3.4.3. На токарном станке обрабатывается однородная цилиндрическая деталь (рис. 53). Считая вес детали равный 400 Н, определить, какой вращательный момент M должен быть приложен к детали, чтобы удержать ее в равновесии, если на нее со стороны резца действует сила F , приложенная в точке K , лежащей на горизонтальном диаметре детали. Эта сила имеет проекции на оси A_x, A_y, A_z , равные соответственно $X = -3$ кН; $Y = 2,4$ кН; $Z = 12$ кН.

Найти также реакции в точках A и B в зависимости от координаты X , определяющей положение резца относительно точки A . Трением пренебречь. Размеры указаны на чертеже в миллиметрах.

Ответ: $y = 0,48 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $X_A + X_B = 3 \text{ кН}$; $Y_A = (3x - 2,55) \text{ кН}$; $Z_A = (-11,8 + 15x) \text{ кН}$; $Y_B = (0,15 - 3x) \text{ кН}$; $Z_B = (0,2 - 15x) \text{ кН}$, x – в метрах.

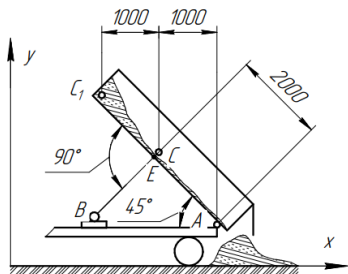


Рис. 52

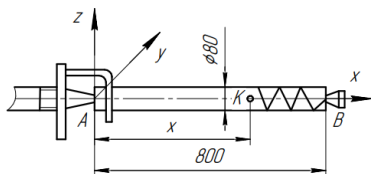


Рис. 53

3.4.4. Коленчатый вал может вращаться в подшипниках A и B (рис. 54). На конце вала насажена шестерня радиусом $r = 20 \text{ см}$. В центре D шатунной шейки горизонтально расположенного колена приложена сила $\vec{F}$ лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси вала, под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали.

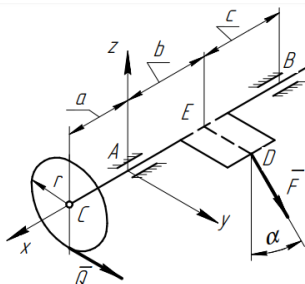


Рис. 54

Определить величину силы Q , приложенной к шестерне параллельно оси у при равновесии вала, и обусловленные силами $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ реакции подшипников A и B , если $F = 20 \text{ кН}$, $ED = 15 \text{ см}$, $a = 15 \text{ см}$, $b = 20 \text{ см}$, $c = 25 \text{ см}$.

Ответ: $Q = 12,99 \text{ кН}$; $Y_A = -22,9 \text{ кН}$; $Z_A = 9,64 \text{ кН}$; $Y_B = -0,11 \text{ кН}$; $Z_B = 7,7 \text{ кН}$.

3.4.5. Определить, при каком значении коэффициента трения скольжения между полотном дороги и ведущими задними колесами автомобиля возможно его движение на подъеме с углом 20° . Трением на переднем колесе пренебречь (рис. 55). Размеры указаны на чертеже.

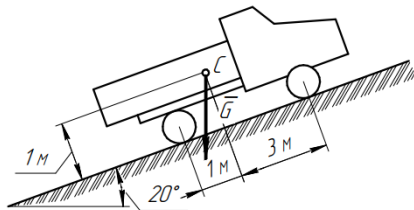


Рис. 55

Ответ: $f \geq 0,43$.

3.4.6. Определить силу сопротивления качению грузевого автомобиля весом 53 кН при движении его на подъеме с углом $\alpha = 14^\circ$ по сухой грунтовой дороге, характеризуемой коэффициентом сопротивления качению $f_k = 0,025$.

Ответ: $1,28 \text{ кН}$.

3.4.7. Клапан двигателя приводится в движение кулачком при помощи рычага АОВ. Определить давление $\bar{Q}$ кулачка на ролик, если известно, что на клапан действует общее усилие $F = 400 \text{ Н}$. Весом рычага пренебречь. Размеры указаны на чертеже в миллиметрах (рис. 56).

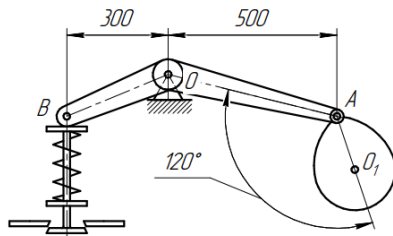


Рис. 56

Ответ: $Q = 277 \text{ Н}$.

3.4.8. Найти максимальное значение высоты расположения центра тяжести автомобиля, допускающее его равномерное устойчивое движение.

ние по дороге с поперечным уклоном $\alpha = 22^\circ$. Величина колеи автомобиля $B = 1,6$ м.

Ответ: $h_{\max} = 2$ м.

3.4.9. Лебедка снабжена храповым колесом диаметром d_1 с собачкой А. На барабан диаметром $\frac{1}{2}$, неподвижно скрепленный с колесом, намотан трос, поддерживающий груз Q (рис. 57). Определить давление R на ось B собачки, если дано: $Q = 50$ кГ, $d_1 = 420$ мм, $d_2 = 240$ мм, $h = 50$ мм, $a = 120$ мм. Весом собачки пренебречь.

Ответ: $R = Q \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} = 31$ кГ. $R = Q \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} = 31$ кГ.

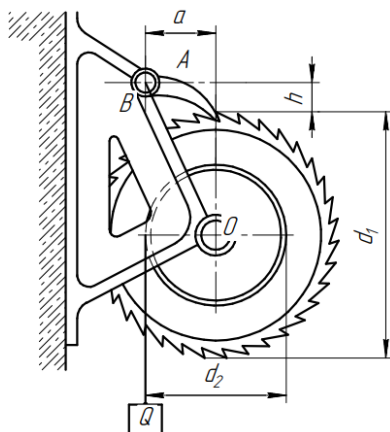


Рис. 57

3.4.10. При каком угле α наклона поверхности возникает опасность опрокидывания автомобиля с заторможенными передними колесами? Скольжение автомобиля не происходит. Высота центра тяжести автомобиля над полотном дороги – 1,5 м, а расстояние его от оси передних колес – 2 м.

Ответ: $\alpha = 53^\circ$.

3.4.11. Определить предельный угол α продольной устойчивости трактора, при котором трактор не опрокидывается (рис. 58), если координаты центра тяжести трактора $h = 731$ мм и $a = 813$ мм.

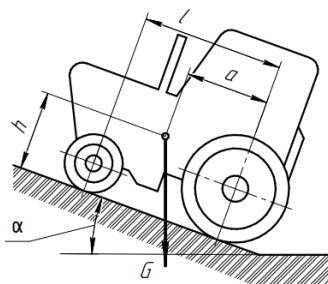


Рис. 58

3.4.12. Определить усилия T и P в точках A и C рычага приспособления для проверки упругости клапанных пружин (рис. 59), если весы показывают 20 Н, $AB = 150$ мм, $BC = 450$ мм. Весом рычага AC пренебречь.

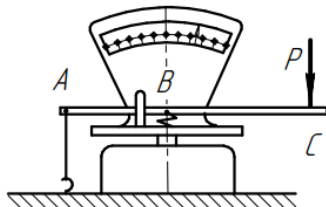


Рис. 59

3.4.13. Определить величину реакции R в точке B тракторной каретки, изображенной на рис. 60, а также усилие T , действующее на ее пружину, если приходящаяся на каретку нагрузка $C = 14$ кН. Размеры каретки: $a = 309$ мм; $b = 276$ мм; $d = 200$ мм; $AB = 90$ мм; $AC = 285$ мм. Угол $\alpha = 20^\circ$.

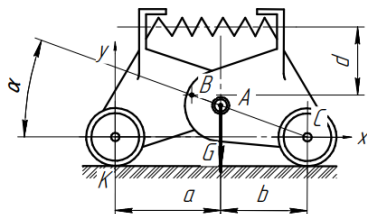


Рис. 60

3.4.14. Определить предельный угол α поперечной устойчивости трактора, если ширина его колеи $L = 1200$ мм и координаты центра тяжести $h = 731$ мм; $b = L/2 = 600$ мм (рис. 61). Как изменится предельный угол, если ширина колеи трактора $L = 1800$ мм, а координаты центра тяжести b и h соответственно равны 900 и 731 мм?

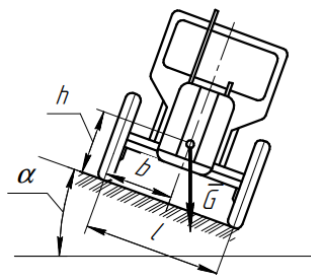


Рис. 61

3.4.15. Определить силу P давления штанги ВС толкателя на клапан тракторного двигателя (рис. 62), если на коромысло АОВ, имеющее размеры $a = 0,07$ м и $b = 0,04$ м, действует сила, равная 660 Н. Трением в сопряжениях пренебречь.

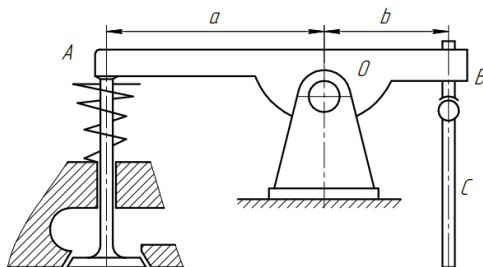


Рис. 62

3.4.16. Определить силу T , с которой шток гидроподъемника АС действует на кузов самосвала в начальный момент подъема, а также реакцию неподвижного шарнира В (рис. 63), если сила тяжести кузова и груза, приложенная в точке D, равна 35 кН, $AB = a = 1$ м, $BD = b = 1,5$ м, угол $\alpha = 30^\circ$.

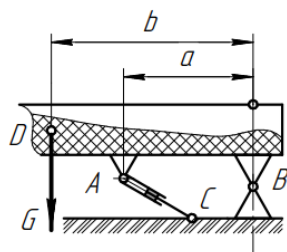


Рис. 63

3.4.17. Определить силу P нажатия на рычаг AB и реакции в шарнирах B , C , D и E приспособления для регулировки муфты сцепления (рис. 64) в момент полного ее выключения, если на рычаг EM действует реакция пружин $T = 1,92$ кН.

Размеры, м: $AB = 0,46$; $BC = 0,11$; $CD = 0,21$; $DE = 0,24$; $EM = 0,09$. Угол $\alpha = \beta = \varphi = 60^\circ$, угол $\gamma = 150^\circ$. Силами тяжести и трения пренебречь.

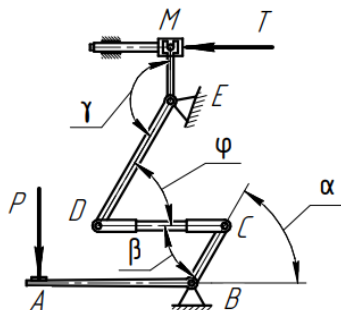


Рис. 64

3.5. Силы, произвольно расположенные в пространстве

3.5.1. Определить реакцию подшипника вала заднего моста трактора на первой передаче, считая конец вала в подшипнике защемленным, если малая цилиндрическая шестерня (на рис 65 не показана) бортовой передачи действует на большую с усилием $P_1 = 42$ кН, а гусеница трактора – на звездочку с усилием $P_2 = 23$ кН. Угол между линией действия силы P_1 и вертикальной осью $\beta = 1^\circ$, а между линией действия силы P_2 и горизонтальной осью $\alpha = 8^\circ$. Расстояние от звездочки до защемленного конца $l = 21,6$ см, а от шестерни до защемленного конца $l_1 = 18$ см. Весами шестерни и вала пренебречь.

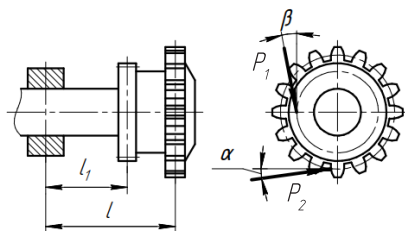


Рис. 65

3.5.2. В случае, когда малая цилиндрическая шестерня бортовой передачи трактора воспринимает от вала заднего моста усилие $P = 34$ кН, определить реакции подшипников А и В, если $l_2 = 12,5$ см, $l_1 = 5,5$ см, $\alpha = 8^\circ$. Весами вала и шестерни пренебречь (рис. 66).

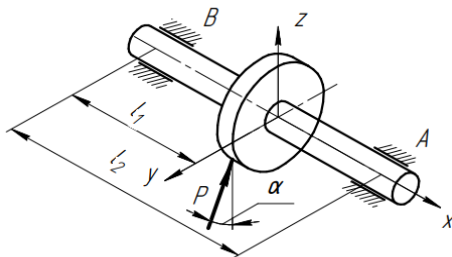


Рис. 66

3.5.3. В случае, когда крутящий момент равен моменту сопротивления и ведомая шестерня первичного вала коробки перемены передач воспринимает от шестерни промежуточного вала усилие $P = 9$ кН, определить

реакции подшипников А и В. Угол $\alpha = 22^\circ$, расстояние между опорами $l_2 = 34,2$ см, а от шестерни до опоры $l_1 = 18,5$ см. Весами вала и шестерни пренебречь (рис. 67).

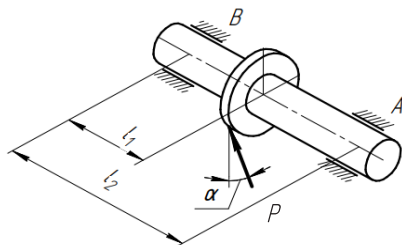


Рис. 67

3.5.4. Определить реакции подшипников А и В, если на ведущую и ведомую шестерни промежуточного вала коробки перемены передач трактора действуют силы $P_1 = 8,8$ кН и $P_2 = 13$ кН. Угол α между вертикальной осью и направлением силы P_1 равен 22° , а угол β между вертикальной осью и направлением силы P_2 равен 11° . Расстояние между опорами $l = 34,2$ см, расстояние от опоры В до ведущей шестерни $l_1 = 15,7$ см, а до ведомой шестерни $l_2 = 19,2$ см. Весами вала и шестерни пренебречь (рис. 68).

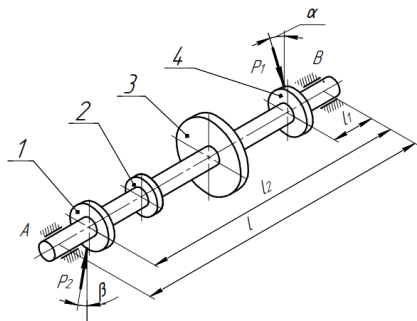


Рис. 68

3.5.5. Для подъема из шахты груза P весом 3 т установлены тренога ABCD и лебедка E. Определить усилия в ногах треноги при равномерном поднятии груза, если треугольник ABC равносторонний и углы, образованные

ногами и тросом DE с горизонтальной плоскостью, равны 60° . Расположение лебедки по отношению к треноге видно на чертеже (рис. 69).

Ответ: $S_A = S_B = 3,15 \text{ т}$; $S_C = 0,155 \text{ т}$.

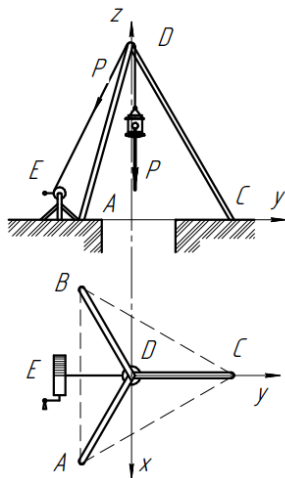


Рис. 69

3.5.6. Груз Q равномерно поднимается мотором M посредством бесконечной цепи (рис. 70). Определить реакции опор A и B и натяжения в цепи, если ветви цепи наклонены к горизонту под углами 30° (ось O_1X_1 параллельна оси Ax). Известно, что $r = 10 \text{ см}$, $R = 20 \text{ см}$, $Q = 1 \text{ т}$, натяжение ведущей части цепи вдвое больше натяжения ведомой части, т. е. $T_1 = 2T_2$.

Ответ: $T_1 = 1 \text{ т}$; $T_2 = 0,5 \text{ т}$; $X_A = -0,52 \text{ т}$; $Z_A = 0,6 \text{ т}$; $X_B = -0,78 \text{ т}$; $Z_B = 0,15 \text{ т}$.

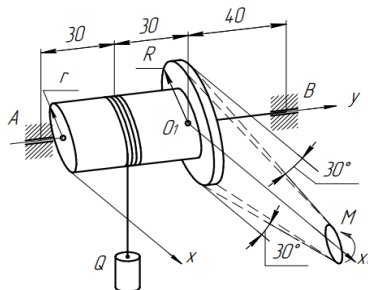


Рис. 70

Вопросы для самоконтроля

Запишите условия (уравнения) равновесия произвольной плоской системы сил.

В чём состоит условие равновесия сил, приложенных к рычагу?

Что называется коэффициентом устойчивости?

Как определяется величина и направление силы трения?

Сформулируйте теорему Вариньона.

Как аналитически определить равнодействующую пространственной сходящейся системы сил?

Запишите условия равновесия пространственной системы сходящихся сил.

Как вычисляется момент силы относительно оси?

Каковы условия равновесия произвольной пространственной системы сил?

Каковы условия равновесия пространственной системы параллельных сил?

ГЛАВА 4. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Центром тяжести твердого тела называется геометрическая точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц тела при любом положении его в пространстве. Если тело имеет плоскость или ось, или центр симметрии, то центр тяжести его лежит соответственно в этой плоскости, на этой оси или в этом центре симметрии. Определить положение центра тяжести можно только по отношению к какой-либо системе координат. Поэтому для упрощения вычислений при решении задач плоскость симметрии выбирают за одну из координатных плоскостей, а ось симметрии – за одну из координатных осей.

Координаты центра тяжести тела определяются формулами

$$x_c = \frac{\sum_1^n (G_k \cdot x_k)}{\sum_1^n G_k}; \quad y_c = \frac{\sum_1^n (G_k \cdot y_k)}{\sum_1^n G_k}; \quad z_c = \frac{\sum_1^n (G_k \cdot z_k)}{\sum_1^n G_k}.$$

где: x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения сил тяжести;

G_k – вес частиц тела;

$\sum_1^n G_k$ – вес тела.

В тех случаях, когда тело однородно, положение центра тяжести можно определять по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_1^n (V_k \cdot x_k)}{\sum_1^n V_k}; \quad y_c = \frac{\sum_1^n (V_k \cdot y_k)}{\sum_1^n V_k}; \quad z_c = \frac{\sum_1^n (V_k \cdot z_k)}{\sum_1^n V_k};$$

где V_k – объем некоторой части тела;

x_k, y_k, z_k – координаты центра тяжести этого объема.

При определении центра тяжести тела сложной конфигурации его разбивают на такие части объемом V_k , для которых известно положение центра тяжести.

Для однородных тонких пластинок можно во многих случаях пренебрегать их толщиной и считать, что центр тяжести расположен в плоскости пластинки. Тогда формулы для координат центра тяжести принимают вид:

$$x_c = \frac{\sum_1^n (S_k \cdot x_k)}{\sum_1^n S_k}; \quad y_c = \frac{\sum_1^n (S_k \cdot y_k)}{\sum_1^n S_k},$$

где S_k – площадь некоторой части тела (пластины),

x_k, y_k, z_k – координаты центра тяжести этой площади.

Аналогичным образом можно записать формулы для координат центра тяжести линии (стержневых тел):

$$x_c = \frac{\sum_1^n (l_k \cdot x_k)}{\sum_1^n l_k}; \quad y_c = \frac{\sum_1^n (l_k \cdot y_k)}{\sum_1^n l_k}; \quad z_c = \frac{\sum_1^n (l_k \cdot z_k)}{\sum_1^n l_k},$$

где l_k – длина некоторой части линии,

x_k, y_k, z_k – координаты центра тяжести этой части линии.

Если тело имеет вырезы (отверстия), то для нахождения центра тяжести такого тела применяют частный случай способа разбиения – дополнение, при котором объемы (площади) вырезанных частей считаются отрицательными.

Пример. «Определение положения центра тяжести трактора с навесным орудием»

Найдем положение центра тяжести агрегата, состоящего из колесного трактора с навесным орудием при его транспортном положении (рис. 71).

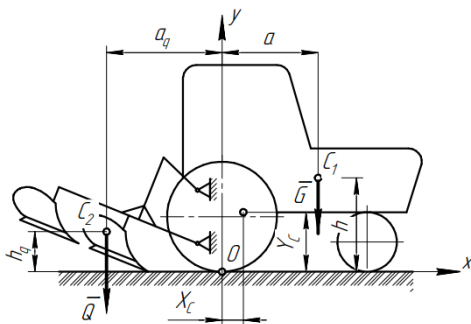


Рис. 71

Для этого воспользуемся формулами для координат центра тяжести, полагая, что вес G трактора приложен в точке C_1 , а вес орудия – в точке C_2 , тогда:

где $x_{c1} = a; y_{c1} = h$ – координаты центра тяжести трактора;

$x_{c2} = -a_q; y_{c2} = h_q$ – координаты центра тяжести навесного орудия;

x_c, y_c – координаты центра тяжести агрегата.

$$\text{Тогда: } x_c = \frac{G \cdot a + Q \cdot a_q}{G + Q}; \quad y_c = \frac{G \cdot h + Q \cdot h_q}{G + Q}.$$

ЗАДАЧА. С помощью взвешивания определено давление тракторного плуга на полевое колесо $R_{\Pi} = 3,5$ кН на бороздное колесо $R_{\text{б}} = 4$ кН и заднее колесо $R_3 = 2,5$ кН. Расположение опорных точек показано на рис. 72, где $A = 0,6$ м; $B = 4$ м; $E = 2$ м; $D = 0,2$ м.

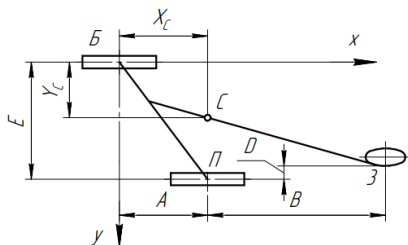


Рис. 72

РЕШЕНИЕ. Положение центра тяжести определяется по отношению к координатным осям с началом, находящимся в точке Б. Сумма давлений плуга на опорные колеса равна:

$$\sum_1^n R_K = R_{\Pi} + R_{\text{б}} + R_3 = 3,5 + 4,0 + 2,5 = 10 \text{ кН.}$$

Координаты точек П, Б, 3:

$$x_{\Pi} = 0,6 \text{ м}; y_{\Pi} = 2 \text{ м};$$

$$x_{\text{б}} = 0; y_{\text{б}} = 0;$$

$$x_3 = 4,6 \text{ м}; y_3 = 1,8 \text{ м.}$$

Статические моменты сил относительно осей находятся как произведения:

$$R_{\Pi} \cdot x_{\Pi} = 3,5 \cdot 0,6 = 2,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad R_{\Pi} \cdot y_{\Pi} = 3,5 \cdot 2 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$R_{\text{б}} \cdot x_{\text{б}} = 4 \cdot 0 = 0; \quad R_{\text{б}} \cdot y_{\text{б}} = 4 \cdot 0 = 0.$$

$$R_3 \cdot x_3 = 2,5 \cdot 4,6 = 11,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad R_3 \cdot y_3 = 2,5 \cdot 1,8 = 4,5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Координаты проекции центра тяжести плуга определяется по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_1^n (R_K \cdot x_K)}{\sum_1^n R_K} = \frac{13,6}{10} = 1,36 \text{ м}; \quad y_c = \frac{\sum_1^n (R_K \cdot y_K)}{\sum_1^n R_K} = \frac{11,5}{10} = 1,15 \text{ м.}$$

4.2. УПРАЖНЕНИЯ

4.2.1. Найти координаты центра тяжести деревянного молотка, состоящего из прямоугольного параллелепипеда и ручки с квадратным сечением (рис. 73). Дано: $a = 10$ см; $b = 8$ см; $c = 18$ см; $d = 40$ см; $l = 3$ см.

Ответ: $x = 0$; $y = 8,8$ см; $z = 0$.

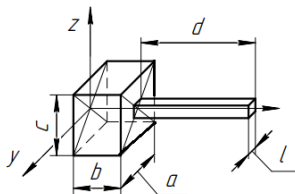


Рис. 73

4.2.2. Найти предельную высоту h цилиндра, одинаковой плотности и одинакового радиуса r , теряет устойчивость в положении равновесия, когда оно опирается поверхностью полушара на гладкую горизонтальную плоскость.

Центр тяжести всего тела должен совпадать с центром полушара (рис. 74). Расстояние центра тяжести однородного полушара от его основания равно $\frac{3}{8}r$.

Ответ: $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

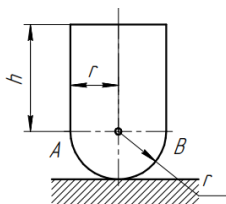


Рис. 74

4.2.3. Определить координату a центра тяжести трактора (рис. 75), вес которого 120 000 Н и база $L = 3050$ мм, если на задние колеса действует нагрузка $G = 42,2$ кН.

Ответ: $a = 1073$ мм.

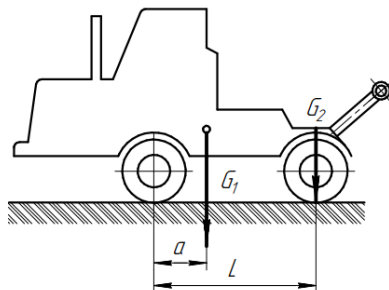


Рис. 75

4.2.5. Определить положение центра тяжести рамы плуга, изготовленной из однородного прокатного материала и имеющей форму прямоугольной трапеции (рис. 76). Размерами сечения профиля по сравнению с длинами контура пренебречь.

Ответ: $x_c = 0,81$ м; $y_c = 0,26$ м.

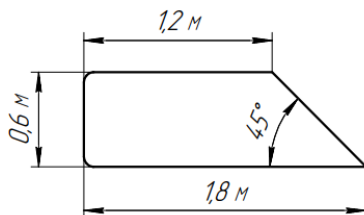


Рис. 76

4.3.6. Определить натяжение T пружин А и В и реакции опор в точках С и D жатки (рис. 77), если вертикальные давления башмаков М и N на почву $Q_1 = Q_2 = 294$ Н, вес жатки $G = 8500$ Н, угол $\alpha = 45^\circ$ и расстояния $a = 0,9$ м, $b = 0,48$ м.

Ответ: $T_1 = T_2 = 10,5$ кН; $y_D = y_C = 7,42$ кН; $z_D = z_C = 3,47$ кН.

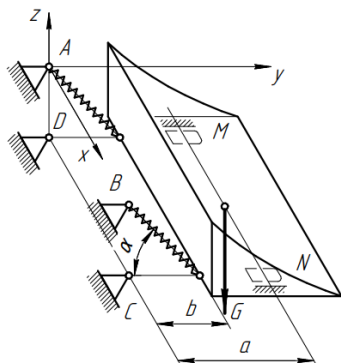


Рис. 77

4.3.7. Для определения высоты h центра тяжести автомобиля задние колеса его ставят на платформу A весов и находят давление Q (показание весов). Определить величину h , если вес автомобиля равен P , взяв остальные данные с чертежа (рис. 78).

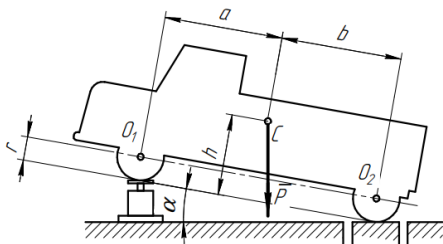


Рис. 78

Ответ:
$$h = \frac{(Q - P) \cdot a - Q \cdot b}{P} \operatorname{ctg} \alpha + 1.$$

4.3.8. Полный вес автомобиля равен 53 кН, а нагрузка, приходящаяся на переднюю ось, составляет 15,7 кН. Определить расстояние по горизонтали от центра тяжести автомобиля до оси ведущих колес, если база автомобиля равна 3,3 м.

Ответ: 0,98 м.

4.3.9. Балка состоит из прямоугольной полосы и двух уголков, размеры которых в миллиметрах указаны на рис. 79. Определить положение центра тяжести сечения.

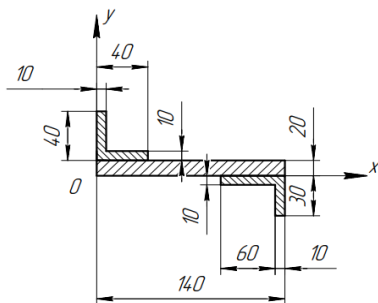


Рис. 79

Ответ: $x_c = 69,5$ мм; $y_c = 10,3$ м.

Вопросы для самоконтроля

Что называется центром тяжести тела?

Каким свойством обладает центр тяжести?

По каким формулам вычисляется положение центра тяжести однородного тела?

Что называется статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси?

Как вычисляется и какую размерность имеют статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси?

Какими вспомогательными теоремами пользуются при определении положения центра тяжести?

Какими способами можно определить положение центра тяжести площади в случае, если известны положения центров тяжести отдельных её частей?

В чём заключается метод группировки или разбиения.

В чём заключается метод отрицательных площадей.

Где лежит центр тяжести симметричного тела?

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. КИНЕМАТИКА

.....

В кинематике изучается движение материальных точек и абсолютно твердых тел независимо от сил, вызывающих их движение.

Положение движущегося объекта в пространстве определяется по отношению к системе координат, связанной с каким-либо телом и называемой системой отсчета. Для того чтобы кинематически задать движение тела, необходимо указать положение его по отношению к выбранной системе отсчета в каждый данный момент времени.

Движение тел рассматривается происходящим в пространстве и во времени. В теоретической механике пространство трактуется как трехмерное евклидово пространство, за единицу длины в котором при измерении расстояний принимается один метр. Время предполагается протекающим во всех системах отсчета одинаково. Единицей времени является секунда. В кинематике время принимают за аргумент, а все другие переменные величины рассматриваются как функции времени.

Основная кинематики заключается в том, чтобы по известному закону движения тела (или точки) определить кинематические величины, характеризующие движение всего тела (точки), а также каждой из его точек в отдельности.

ГЛАВА 5. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Кинематически задать движение материальной точки можно одним из трех способов: векторным, координатным и естественным.

При векторном способе уравнение движения точки представляет собой зависимость от времени радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из некоторого неподвижного центра в движущуюся точку:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ точки соответственно определяются как первая и вторая векторные производные от радиуса-вектора точки:

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}}; \quad \vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Траектория точки есть годограф ее радиуса-вектора. При векторном способе задания движения точки предварительное знание ее траектории не требуется.

При координатном способе уравнения движения точки имеют вид:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t),$$

где x, y, z – координаты движущейся точки в системе отсчета, представляющей собой декартовы прямоугольные оси координат. Скорость точки определяется по ее проекциям V_x, V_y, V_z на координатные оси:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

где $V_x = \dot{x}; V_y = \dot{y}; V_z = \dot{z}$.

Направление вектора скорости характеризуется косинусами углов, которые этот вектор составляет с координатными осями:

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{V}; \quad V_y = V \cos \beta = \frac{V_y}{V}; \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{V}.$$

Аналогичным образом по проекциям на координатные оси определяются модуль и направление ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

где $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$,

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Уравнение траектории можно получить, решив совместно уравнения движения точки, исключив из них время. Для задания движения координатным способом предварительное знание траектории точки не требуется.

Естественным способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки заранее известна. Закон движения точки по траектории имеет вид $S = S(t)$, где S – криволинейная координата точки, измеренная вдоль дуги траектории. Скорость точки направлена по касательной к траектории и равна $V = \dot{S}$.

При решении задач может возникнуть необходимость в переходе от координатного способа задания движения к естественному, который осуществляется с помощью формулы:

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt.$$

Ускорение точки определяется по его проекциям на касательную и главную нормаль к траектории:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \frac{\dot{V}}{V^2}$ – касательное ускорение точки;

$a_n = \frac{V^2}{\rho}$ – нормальное ускорение точки.

ρ – радиус кривизны траектории в данной ее точке.

Отклонение вектора ускорения $\vec{a}$ от главной нормали характеризуется углом α , определяемым формулой:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n}.$$

Пример. «Движение семян в канале гнездового высевающего аппарата»

При работе квадратно-гнездовой сеялки семена из высевающего аппарата поступают к гнездообразующим клапанам сошников. Движение семян в канале высевающего аппарата описывается уравнениями:

$$x = V_0 \cdot t \tag{7.1}$$

$$y = H - \frac{gt^2}{2} \tag{7.2}$$

где V_0 – начальная скорость падения семян;

t – время падения;

H – расстояние от высевающего аппарата до плоскости клапана.

Решая уравнения (7.1) и (7.2) совместно исключив время t , получим уравнение траектории семян:

$$y = H - \frac{gx^2}{2V_0^2}.$$

Как видно, траектория семян представляет собой параболу. Если движению семян не препятствуют стенки канала, то время падения их от дна высевающего аппарата до гнездообразующего клапана определится из уравнения (7.2) при условии, что $y = 0$ (т. е. когда семена достигают клапана):

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (7.3)$$

Дальность полета L семян по горизонтали может быть найдена из выражения (7.1), если подставить в него значение t , определяемое формулой (7.3):

$$L = V_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

ЗАДАЧА 5.1.1. Найти траекторию точки M шатуна AB кривошипно-шатунного механизма, если $AB = AO = 60$ см, $MB = \frac{2}{3} AB$, $\varphi = 2\pi t$ (t – в секундах), а также определить величину и направление скорости и ускорения точки M в момент времени $t = 0$ (рис. 80).

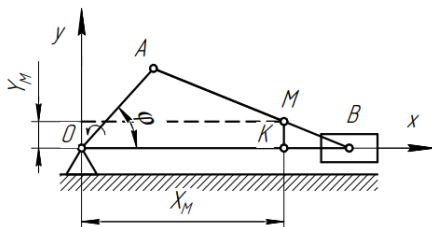


Рис. 80

РЕШЕНИЕ. Пусть в данный момент времени t механизм занимает положение, указанное на чертеж, так как треугольник OAB равнобедренный, то угол AOB равен φ . Найдем уравнения движения точки M . Как видно из рис. 80,

$$x_M = OK = \left(OA + \frac{1}{3} AB \right) \cdot \cos \varphi$$

$$y_M = MK = MB \cdot \sin \varphi = \frac{2}{3} AB \cdot \sin \varphi.$$

Тогда, подставляя значения AO , AB и φ , имеем:

$$X_M = 80 \cos 2\pi t \text{ см}; \quad Y_M = 40 \sin 2\pi t \text{ см}.$$

Решив уравнения движения совместно и исключив время t , получим уравнение траектории точки, М:

$$\frac{X_M^2}{80^2} + \frac{Y_M^2}{40^2} = 1.$$

Таким образом, точка М движется по эллипсу с полуосями 80 и 40 см. Для определения скорости точки найдем проекции ее на координатные оси:

$$V_x = \dot{X}_M = -160\pi \sin 2\pi t; \quad V_y = \dot{Y}_M = 40\pi \sin 2\pi t \text{ см/с.}$$

Модуль скорости точки М в произвольный момент времени t равен:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-160\pi)^2 \sin^2 2\pi t + (40\pi)^2 \cos^2 2\pi t} \text{ см/с.}$$

При $t=0$ величина скорости $V=80$ р см/с. Направление скорости найдем по формулам:

$$\cos(\bar{V}, \bar{i}) = \frac{V_x}{V} = \frac{0}{80\pi} = 0; \quad \cos(\bar{V}, \bar{j}) = \frac{V_y}{V} = \frac{80\pi}{80\pi} = 1,$$

откуда видно, что вектор скорости точки М при $t=0$ направлен параллельно оси y .

Чтобы определить величину ускорения точки М, найдем проекции его на координатные оси:

$$a_x = \ddot{X}_M = -320\pi^2 \cos 2\pi t \text{ см/с}^2; \quad a_y = \ddot{Y}_M = 160\pi^2 \sin 2\pi t \text{ см/с}^2,$$

формула для определения величины ускорения имеет вид:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-320\pi^2)^2 \cos^2 2\pi t + (-160\pi^2)^2 \sin^2 2\pi t}.$$

При $t=0$. $a=320\pi^2$ см/с². Направление ускорения определяется формулами:

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a} = \frac{-320\pi^2}{320\pi^2} = -1; \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a} = \frac{0}{320\pi^2} = 0;$$

Как видно, вектор ускорения точки М при $t=0$ направлен параллельно оси x .

Задача. 5.1.2. Движение частицы удобрений, брошенной под углом α к горизонту планкой барабана туковысевающего аппарата, описывается уравнениями:

$$x = V_{пл} \cdot t \cdot \cos \alpha; \quad y = V_{пл} \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

где $V_{пл}$ – скорость конца планки барабана.

Определить радиус кривизны траектории в момент схода частицы с планки барабана.

РЕШЕНИЕ. Радиус ρ кривизны траектории частицы может быть найден из формулы $\rho = \frac{V^2}{a_n}$. Так как движение задано координатным способом, то скорость частицы определяется по ее проекциям на координатные оси:

$$V_x = \dot{x} = V_{n\lambda} \cos \alpha; \quad V_y = \dot{y} = V_{n\lambda} \sin \alpha - gt.$$

$$V = \sqrt{V_{n\lambda}^2 \cos^2 \alpha + (V_{n\lambda} \sin \alpha - gt)^2}.$$

Нормальное ускорение частицы найдём по формуле:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

где $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{0^2 + (-g)^2} = g,$

$$a_\tau = \frac{V_{n\lambda} \sin \alpha - gt^2}{\sqrt{V_{n\lambda}^2 \cos^2 \alpha + (V_{n\lambda} \sin \alpha - gt)^2}} \cdot g.$$

Определим значения скорости и касательного ускорения частицы в момент схода ее с планки барабана (при $t = 0$):

$$V = V_{n\lambda}; \quad a_\tau = -g \cdot \sin \alpha.$$

Тогда

$$a_n = \sqrt{g^2 - g^2 \sin^2 \alpha} = g \cos \alpha,$$

и, следовательно, $\rho = \frac{V_{n\lambda}^2}{g \cos \alpha}.$

5.2. УПРАЖНЕНИЯ

5.2.1. Определить уравнения движения планки мотопила комбайна, движущегося по прямолинейному участку пути с постоянной скоростью V . Мотовило радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью ω . Ось мотопила установлена на высоте $(H + h)$ над поверхностью почвы, где h – высота среза, H – расстояние от ножа до оси мотопила (рис. 81). В начальный момент планка находилась в точке M_0 на горизонтальном диаметре мотопила.

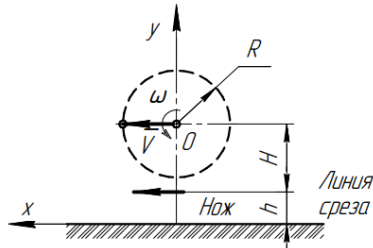


Рис. 81

Ответ: $x_M = V \cdot t + R \cos \omega t$; $y_M = (H + h) - R \sin \omega t$.

5.2.2. Кривошип OA вращается так, что угол его поворота $\varphi = 20$ рад. Длина кривошипа $OA = 20$ см, длина шатуна $AB = 100$ см. Определить уравнения движения точки M шатуна, отстоящей от точки A на расстоянии $AM = \frac{2}{5} AB$ (рис. 82).

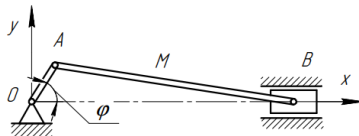


Рис. 82

Ответ: $AM = \frac{2}{5} AB$.

5.2.3. Уравнения движения любой точки колеса трактора при равномерном его движении имеют вид:

$$x = R\omega t - r \sin \omega t; \quad y = R - r \cos \omega t,$$

где R – радиус колеса;

r – расстояние от данной точки до оси колеса;

ω – угловая скорость вращения колеса вокруг его оси.

Найти скорость и ускорение точки колеса, отстоящей на расстоянии r от его оси в момент времени t .

Ответ: $V = \omega \sqrt{R^2 - 2rc \cos \omega t + r^2}$; $a = r\omega^2$.

5.2.4. Угол поворота зубчатого колеса 1 редуктора (рис. 83) изменяется по закону $\varphi = \frac{bt^2}{2}$, где b – постоянный коэффициент. Найти закон движения по траектории точки M , находящейся на окружности колеса 2, а также определить ее скорость и ускорение. Расстояние S отсчитывать от начального положения точки в направлении ее движения. Радиусы колес равны r_1 и r_2 .

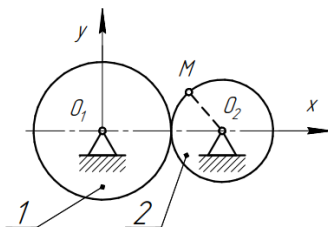


Рис. 83

Ответ: $S = \frac{r_1 b t^2}{2}$; $V = r_1 \cdot b \cdot t$; $a = \frac{r_1 \cdot b}{r_2} \sqrt{r_2^2 + r_1^2 \cdot b^2 \cdot t^4}$.

5.2.5. Для рыхления почвы применяется рабочий орган в форме барабана, на ободе которого закреплены жестко радиально расположенные ножи. При работе барабан вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 84). Ось в свою очередь движется с постоянной скоростью U и, перпендикулярной к ней.

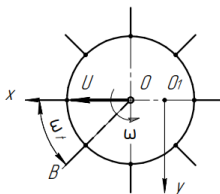


Рис. 84

Радиус барабана равен R , длина ножа $AB - h$. Определить траекторию точки B конца ножа AB . Начало координатных осей xO_1y , выбрать в точке O_1 , соответствующей горизонтальному положению ножа AB .

$$\text{Ответ: } x = \frac{u}{\omega} \arcsin \frac{y}{R+h} + R \cos \arcsin \frac{y}{R+h}.$$

Вопросы для самоконтроля

Какие кинематические способы задания движения точки существуют и в чём состоит каждый из этих способов?

Как по уравнениям движения точки в координатной форме определить её траекторию?

Чему равен вектор скорости точки в данный момент и какое направление он имеет?

Как определяются проекции скорости точки на неподвижные оси декартовой системы координат?

Как определяется величина и направление вектора скорости при координатном способе задания движения точки?

Как определяется величина и направление ускорения точки при естественном способе задания движения?

Что характеризует собой касательное ускорение?

При каком движении точки равно нулю касательное ускорение, и при каком – нормальное?

Как определяются проекции ускорения на неподвижные оси декартовых координат?

Как определяется модуль и направление ускорения при координатном способе задания движения точки?

Что характеризует собой нормальное ускорение?

В какие моменты времени нормальное ускорение в криволинейном движении может обратиться в нуль?

В какие моменты времени касательное ускорение в неравномерном движении может обратиться в нуль?

В каком случае полное ускорение точки в течение некоторого промежутка времени может быть равно нулю.

ГЛАВА 6. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором любые две его точки остаются неподвижными. Прямая, проведенная через эти точки, есть ось вращения тела.

Уравнение вращательного движения выражается зависимостью угла поворота тела от времени, т. е. $\varphi = \varphi(t)$. Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются и угловая скорость ω и угловое ускорение ε тела, которые определяются соответственно как первая и вторая производные от угла поворота по времени:

$$\omega = \dot{\varphi}; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Угловая скорость считается положительной, если тело вращается против часовой стрелки, и отрицательной, если вращение происходит по часовой стрелке. При ускоренном вращении знаки ω и ε совпадают, при замедленном – противоположны.

Если угловая скорость в процессе движения остается постоянной, то такое вращение называется равномерным. Уравнение движения при этом имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 – начальный угол поворота.

Если в процессе движения остается постоянным угловое ускорение тела, то такое вращение называется равнопеременным. Для этого случая вращательного движения величина угловой скорости определяется из выражения:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

а уравнение движения принимает вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

При решении задач иногда возникает необходимость в вычислении угловой скорости ω (рад/с) по известной частоте вращения n (об/мин) для чего пользуются формулой:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

В ряде механизмов вращательное движение от одного тела к другому передается с помощью зубчатых колес, имеющих неподвижные оси вращения. В этом случае угловые скорости колес обратно пропорциональны их радиусам:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Эта зависимость справедлива и для ременной передачи, если пренебречь скольжением ремня.

Кинематическими характеристиками любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, являются ее линейная скорость и линейное ускорение. Величина линейной скорости точки находится по формуле:

$$V = \omega R,$$

где R – расстояние от точки до оси вращения.

Величина касательного (тангенциального), нормального (центростремительного) и полного ускорения точки определяются выражениями:

$$a_{\tau} = \varepsilon R; a_n = \omega^2 R; a_{\text{полное}} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Направление вектора линейного ускорения точки характеризуется углом α , тангенс которого равен:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

6.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

6.2.1. Молотильный барабан начинает вращаться из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = 7,5 \text{ с}^{-2}$. Найти угловую скорость барабана к концу 15-ой секунды, а также определить число оборотов (n), которые сделает барабан за это время.

РЕШЕНИЕ. Так как угловое ускорение барабана постоянно и положительно, то вращение его является равноускоренным. Поэтому угловую скорость и угол поворота определяем по формулам:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

Поскольку барабан начинает вращаться из состояния покоя, то $\omega_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$. Тогда угловая скорость барабана к концу 15 секунды будет равна:

$$\omega = \varepsilon t = 7,5 \cdot 15 = 112,5 \text{ с}^{-1}.$$

Угол поворота барабана за это время составит:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{7,5 \cdot 15^2}{2} = 843,75 \text{ рад}.$$

Число оборотов барабана найдем по формуле:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{843,75}{6,28} = 134 \text{ об}.$$

6.2.2. Клавиша соломотряса АВ соединена шарнирно в точках А и В с кривошипами ОА и О₁В, вращающимися вокруг осей О и О₁ с постоянной частотой вращения $n = 240 \text{ об/мин}$ (рис. 85). Определить скорость и ускорение любой точки М клавиши, если $OA = O_1B = 0,2 \text{ м}$.

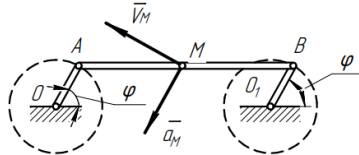


Рис. 85

РЕШЕНИЕ. При равенстве длин кривошипов и одинаковой их частоте вращения клавиша АВ совершает поступательное движение, а точка М движется тождественно с точками А и В. Скорость и ускорение точки А находим по формулам:

$$V_A = \omega \cdot OA; \quad a_A^n = \omega^2 \cdot OA; \quad a_A^c = \varepsilon \cdot OA.$$

Так как $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{240\pi}{30} = 8\pi \text{ с}^{-1}$, то

$$V_A = 0,2 \cdot 8\pi = 1,6 \text{ м/с};$$

$$a_A^{\tau} = 0,2 \cdot 0 = 0;$$

$$a_A^{\text{полное}} = a_A^n = (8\pi)^2 0,2 = 12,8\pi^2 \text{ м/с}.$$

Скорость и ускорение точки M , равные скорости и ускорению точки A , показаны на рис. 74.

6.3. УПРАЖНЕНИЯ

6.3.1. Барабан комбайна вращается с угловой скоростью, соответствующей 1050 об/мин. После остановки двигателя барабан продолжает вращаться по инерции с угловым замедлением $\varepsilon = -1,4 \text{ с}^{-2}$. Определить, сколько пройдет времени с момента выключения двигателя до остановки барабана.

Ответ: 78,5 с.

6.3.2. В механизме домкрата (рис. 86) при вращении рукоятки А начинают вращаться шестерни 1, 2, 3, 4 и 5, которые приводят в движение зубчатую рейку В домкрата. Определить скорость последней, если рукоятка А вращается с угловой скоростью, равной π рад/с.

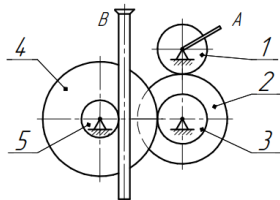


Рис. 86

Числа зубцов $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$, $z_4 = 32$; радиус пятой шестерни $r_5 = 4 \text{ см}$.

Ответ: $\pi/4 \text{ см/сек}$.

6.3.3. Передача вращательного движения осуществляется с помощью зубчатых конических колес, размеры которых в мм указаны на рис. 87. По заданной частоте вращения $n_1 = 360 \text{ об/мин}$ первого колеса определить скорость и ускорение наиболее удаленной от осей вращения точки соприкосновения колес, а также частоту вращения n_2 второй шестерни.

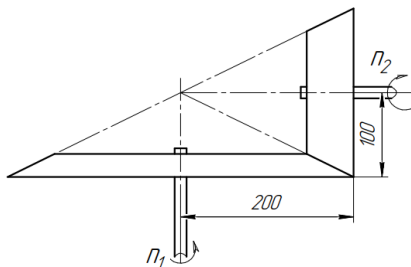


Рис. 87

Ответ: $V_1 = V_2 = 7,54 \text{ м/с}$; $a_1 = 284 \text{ м/с}^2$; $a_2 = 568 \text{ м/с}^2$; $n_2 = 720 \text{ об/мин}$.

6.3.4. Движение поршня двигателя задано уравнением: $S = R \sin kt$. Определить угловую скорость коленчатого вала двигателя в момент, когда поршень занимает среднее положение если длина шатуна AB равна L , а длина кривошипа OA равна R (рис. 88).

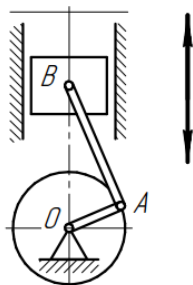


Рис. 88

Ответ: $\omega = \frac{k(2L - R^2)}{L\sqrt{4L^2 - R^2}}.$

6.3.5. Угловая скорость зубчатого колеса 1 диаметра $D_1 = 360 \text{ мм}$ равна $10 \pi/3 \text{ рад/с}$.

Каким должен быть диаметр зубчатого колеса 2, находящегося с колесом 1 во внутреннем зацеплении (рис. 89), угловая скорость которого в три раза больше угловой скорости колеса 1?

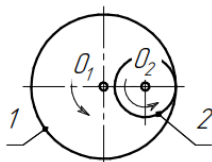


Рис. 89

Ответ: $D_2 = 120 \text{ мм}$.

6.3.6. Редуктор скорости, служащий для замедления вращения и передающий вращение вала 1 валу 2, состоит из четырех шестерен (рис. 90) с соответствующим числом зубцов: $Z_1 = 10$, $Z_2 = 60$, $Z_3 = 12$, $Z_4 = 70$.

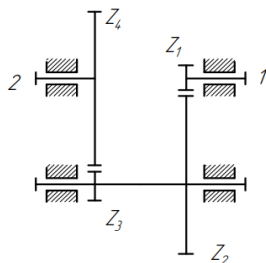


Рис. 90

Определить передаточное отношение механизма.

Ответ: $u_{1-2} = \omega_1 / \omega_2 = 35$.

6.3.5. В механизме стрелочного индикатора движение от рейки мерительного штифта 1 передается шестерне 2, на оси которой укреплено зубчатое колесо 3, сцепляющееся с шестерней 4, несущей стрелку (рис. 91). Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задано уравнением $x = a \sin kt$ и радиусы зубчатых колес соответственно равны r_2, r_3 и r_4 .

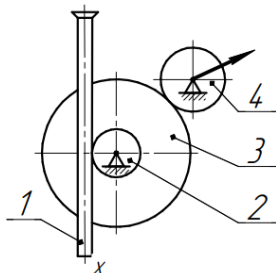


Рис. 91

Ответ: $\omega_4 = \frac{r_3}{r_2 r_4} a k \cos kt$.

Вопросы для самоконтроля

- Какое движение твёрдого тела называется поступательным?
- Какое движение твёрдого тела называется вращательным?
- Как определяется положение вращающегося тел?
- Какая величина называется угловой скоростью?
- Какая величина называется угловым ускорением?
- Какое вращение называется равномерным?
- Как определяется скорость точки вращающегося тела?
- Как определяется вектор скорости при помощи формулы Эйлера?
- Как определяется ускорение точки вращающегося твёрдого тела?
- Как определяются величины нормального и касательного ускорений точки вращающегося тела?
- Как определяется величина полного ускорения точки вращающегося твёрдого тела?
- Какие виды движения твердого тела называют простейшими?
- Каковы основные свойства поступательного движения твердого тела?
- Какое движение твердого тела называют вращением вокруг неподвижной оси?
- Каковы основные кинематические характеристики движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
- Как связаны между собой угол поворота тела, угловая скорость и угловое ускорение при вращении его вокруг неподвижной оси?
- Как определяют скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
- Как определяют ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

ГЛАВА 7. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

7.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При сложном (составном) движении материальная точка перемещается по отношению к двум системам координат, из которых одна считается неподвижной, а вторая подвижной и движется по отношению к первой. Каждая из этих систем координат связана с определенным телом.

Движение точки в подвижной системе координат называется относительным, а движение подвижной системой координат по отношению к неподвижной – переносным движением. Движение точки относительно неподвижной системы отсчета является абсолютным движением. Для их обозначения в относительном движении часто всего используется индекс r (*relative* – относительный) – V_r, a_r ; в переносном движении индекс e (*entrained* – увлекать за собой) – V_e, a_e . В связи с этим различают абсолютную $\vec{V}_a$, относительную $\vec{V}_r$ и переносную $\vec{V}_e$ скорости точки, а также ее абсолютное $\vec{a}_a$, относительное $\vec{a}_r$ и переносное $\vec{a}_e$ ускорения. При этом относительной скоростью и относительным ускорением называют скорость и ускорение точки в относительном движении, а абсолютной скоростью и абсолютным ускорением – скорость и ускорение точки в абсолютном движении. Переносной скоростью и переносным ускорением называются скорость и ускорение той неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка.

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

а величина ее находится по формуле:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e \cdot V_r \cdot \cos(\vec{V}_e, \vec{V}_r)}.$$

При поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r,$$

а величина его определяется формулой:

$$a_a = \sqrt{a_e^2 + a_r^2 + 2a_e \cdot a_r \cdot \cos(\vec{a}_e, \vec{a}_r)}.$$

В случае, когда переносное движение является непоступательным (вращательным или плоскопараллельным), абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех его составляющих – относительного, переносного и Кориолиса ускорений:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

Ускорение Кориолиса $\vec{a}_c$ определяется формулами:

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \cdot \vec{V}_r),$$

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e \cdot \vec{V}_r),$$

где ω_e – угловая скорость тела, в переносном движении.

Направление ускорения Кориолиса можно получить, спроектировав вектор $\vec{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и затем повернув эту проекцию на угол $\frac{\pi}{2} (90^\circ)$ в сторону вращения переносного движения.

При решении задач следует выделить переносное, относительное и абсолютное движения точки, выбрав подвижную и неподвижную системы отсчета. Затем по формулам, связывающим скорости и ускорения точки в относительном, переносном и абсолютном движениях, найти искомые величины.

7.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 7.2.1. «Определение абсолютной скорости сегмента режущего аппарата уборочной машины»

Резание растений в уборочных машинах происходит благодаря возвратно-поступательному движению ножа режущего аппарата, получающего привод через кривошипно-ползунный механизм от ходовых колес или вала отбора мощности трактора. На качество среза и, следовательно, на выбор угла α наклона лезвия сегмента ножа (рис. 92) оказывает влияние величина и направление его абсолютной скорости.

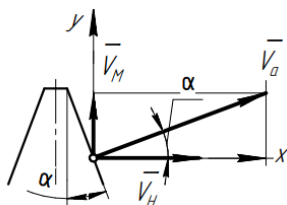


Рис. 92

Сегмент участвует в сложном движении, которое состоит из относительного движения ножа согласно уравнению:

$$x = r(1 - \cos \omega t) \quad (9.1)$$

где r – радиус кривошипа кривошипно-ползунного механизма;

ω – угловая скорость кривошипа,

и переносного движения вместе с машиной, определяемого уравнением:

$$y = V_M t,$$

где V_M – скорость машины.

Относительная скорость сегмента, равная скорости $\bar{V}_H$ ножа и определяется как производная от уравнения (9.1):

$$V_r = V_H = \dot{x} = [r(1 - \cos \omega t)]' = r\omega \sin \omega t,$$

а переносная скорость ножа равна скорости машины $V_e = V_M$.

Абсолютная скорость любой точки сегмента

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

или

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{(r\omega \sin \omega t)^2 + V_M^2}.$$

Направление абсолютной скорости определяется углом α , который находится из выражения:

$$\cos \alpha = \frac{r\omega \sin \omega t}{\sqrt{(r\omega \sin \omega t)^2 + V_M^2}}.$$

Пример 7.2.2. «Определение абсолютной скорости тербления»

При уборке свеклы свеклоуборочными комбайнами корни из почвы извлекаются тербильными аппаратами. Тербильные аппараты представляют собой бесконечную ленту, оборудованную захватывающими лапами, движущуюся вверх и против хода машины и захватывающую корни за ботву (рис. 93).

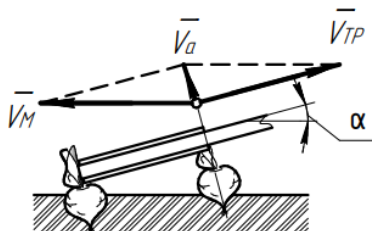


Рис. 93

Абсолютная скорость корня $\bar{V}_a$, захваченного тербильной лентой, определяется переносной скоростью $\bar{V}_M$ поступательного движения машины и относительной скоростью тербильной ленты $\bar{V}_{TP}$ и может быть найдена из параллелограмма скоростей по формуле:

$$V_a = \sqrt{V_M^2 + V_{TP}^2 + 2V_M \cdot V_{TP} \cdot \cos \alpha},$$

где α – угол наклона ленты к горизонту.

Для облегчения процесса тербления абсолютная скорость должна быть направлена по оси корня.

Задача. Мотовило состоит из шести планок, расположенных равномерно на поверхности цилиндра радиусом R (рис. 94).

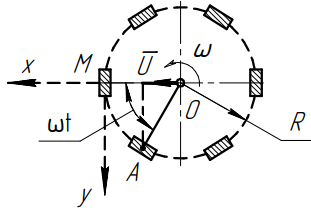


Рис. 94

Планки, связанные в одно целое, вращаются равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси O цилиндра, которая в свою очередь, перемещается с постоянной скоростью U . Найти абсолютную скорость центра A какой-либо планки.

РЕШЕНИЕ. Точка A планки мотвила совершает сложное движение, в котором относительным является движение точки по окружности радиуса R , а переносным – поступательное движение вместе с осью O . Проведя координатные оси x и y через точку M , расположенную на левом конце горизонтального диаметра, найдем уравнения относительного движения центра A планки в этих осях:

$$x_r = -R(1 - \cos\omega t) \quad (9.1)$$

$$\text{и } y_r = R\sin\omega t \quad (9.2)$$

Взяв производные от выражений (9.1) и (9.2), получим проекции относительной скорости точки A на координатные оси:

$$V_{rx} = \dot{x}_r = [-R(1 - \cos\omega t)]' = -R\omega\sin\omega t,$$

$$V_{ry} = \dot{y}_r = [R\sin\omega t]' = R\omega\cos\omega t.$$

Для нахождения проекций V_x и V_y абсолютной скорости точки A следует к проекциям относительной скорости V_{rx} и V_{ry} прибавить проекции переносной скорости точки $V_{ex} = U$ и $V_{ey} = 0$. Тогда

$$V_x = U - R\omega\sin\omega t;$$

$$V_y = R\omega\cos\omega t.$$

Абсолютная скорость точки A планки мотвила определяется выражением:

$$V_a = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{U^2 - 2UR\sin\omega t + R^2\omega^2}.$$

ЗАДАЧА. Для очистки картофеля от почвы во время его уборки вся масса вместе с почвой поступает в чановую центрифугу, имеющую форму усеченного конуса (рис. 95). Боковая поверхность центрифуги состоит из стальных

прутьев совпадающих с образующими конуса, вдоль которых при вращении центрифуги перемещаются клубни картофеля.

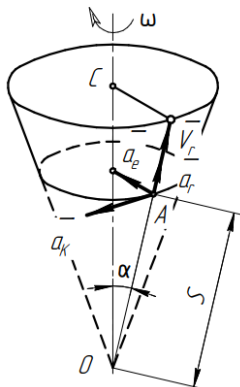


Рис. 95

Рассматривая клубень A как материальную точку (так как клубень совершает поступательное движение) и зная, что движение его вдоль образующей описывается уравнением $S = 2e^{3t} + 3e^{-1,5t} - 4,4$ (м), определить полное ускорение клубня в момент $t = 0$, если известно, что центрифуга вращается с угловой скоростью $\omega = 10^{-1}$, а образующая конуса составляет с его осью угол $\alpha = 30^\circ$.

РЕШЕНИЕ. Так как движение точки A является сложным, состоящим из относительного движения точки вдоль образующей конуса и переносного вращательного движения самого конуса, то абсолютное ускорение точки определяется выражением:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c.$$

Найдем относительные скорость и ускорение точки A :

$$V_r = \dot{S} = 6e^{3t} - 4,5e^{-1,5t},$$

$$a_r = \ddot{S} = 18e^{3t} - 6,75e^{-1,5t}.$$

Переносное ускорение:

$$a_e = \omega^2 r,$$

где r – расстояние точки A от оси вращения.

При $t = 0$, $r = S \cdot \sin \alpha = (2e^{3t} + 3e^{-1,5t} - 4,4) \sin \alpha$ (м)

и следовательно, переносное ускорение:

$$a_e = \omega^2 (2e^{3t} + 3e^{-1,5t} - 4,4) \sin \alpha.$$

Направлено это ускорение от точки А к оси конуса.

Ускорение Кориолиса определяется выражением:

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin \alpha = 2\omega(6e^{3t} - 4,5e^{-1,5t}) \sin \alpha$$

и направлено перпендикулярно к r в сторону вращения конуса.

При $t = 0$; $a_r = 24,75 \text{ м/с}^2$; $a_e = 30 \text{ м/с}^2$; $a_c = 15 \text{ м/с}^2$.

Для нахождения абсолютного ускорения точки изображаем картину векторов ускорений (рис. 96), задаём оси координат и находим проекции абсолютного ускорения точки А на заданные координатные оси x, y, z :

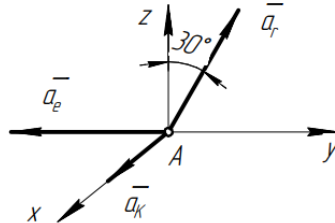


Рис. 96

$$a_x = a_c = 15 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = a_r \cos 60^\circ - a_e = -17,6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_z = a_r \cos 30^\circ = 21,45 \text{ м/с}^2.$$

Величина абсолютного ускорения точки А находится по формуле:

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{15^2 + (-17,6)^2 + 21,45^2} = 31,5 \text{ м/с}^2.$$

7.3. УПРАЖНЕНИЯ

7.3.1. Найти абсолютную скорость какой-либо точки M спарника AB , соединяющего кривошпы OA и O_1B осей O и O_1 если радиусы колес одинаковы: $R = 1$ м; радиусы кривошпов: $OA = O_1B = 0,5$ м (рис. 97). Скорость экипажа $v_0 = 20$ м/с.

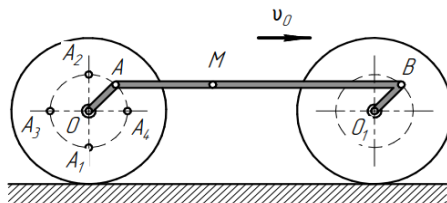


Рис. 97

Скорость точки M определить для четырех моментов, когда кривошпы OA и O_1B либо вертикальны, либо горизонтальны. Колеса катятся по рельсам без скольжения.

Ответ: $v_1 = 10$ м/с, $v_2 = 30$ м/с, $v_3 = v_4 = 22,36$ м/с.

7.3.2. Широкозахватная льнотеребилка перемещается трактором со скоростью $V_1 = 1,3$ м/с. При этом теребильный ремень движется относительно машины со скоростью $V_2 = 3$ м/с, направленной под углом 35° к горизонту (рис. 98).

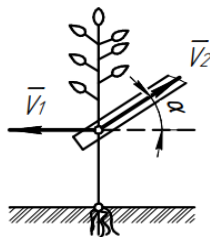


Рис. 98

Найти величину и направление скорости, с которой лён выдергивается из земли.

Ответ: $V = 2,07$ м/с; угол наклона вектора абсолютной скорости к горизонту $\alpha = 56^\circ$.

7.3.3. При совмещении работы механизмов подъема груза и перемещения крана, груз A перемещается одновременно в горизонтальном и вертикальном направлении (рис. 99). Барабан B радиуса $r = 50$ см, на который навит канат, поддерживающий груз A , вращается при пуске в ход с угловой скоростью $\omega = 2\pi$ рад/с. Кран перемещается в горизонтальном направлении с постоянной скоростью $v = 0,5$ м/сек.

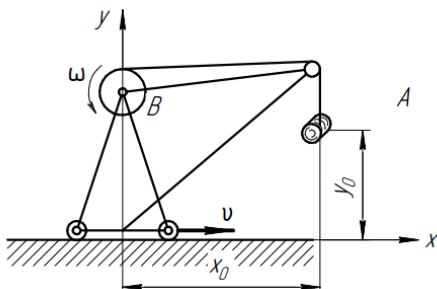


Рис. 99

Определить абсолютную траекторию груза, если начальные координаты груза $x_0 = 10$ м, $y_0 = 6$ м.

Ответ: $y = \frac{x - x_0}{v} \omega r + y_0 = 6,28x - 56,8$.

7.3.4. Канавокопатель (рис. 100) движется скоростью $V_1 = 1080$ м/час. Скорость движения ленты с ковшами $V_2 = 1$ м/с.

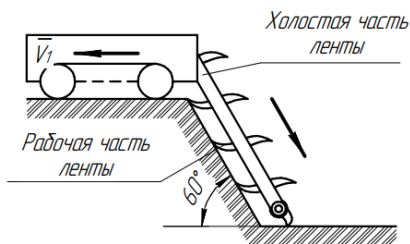


Рис. 100

Определить величину скорости точек рабочей (V_p) и холостой (V_x) частей ленты по отношению к земле.

Ответ: $V_p = 0,89$ м/с; $V_x = 1,18$ м/с.

7.3.5. На рисунке 101 изображена лопатка центробежного водяного насоса, имеющая очертание дуги окружности с центром в точке B , расположенной на одной горизонтали с осью вращения насоса O .

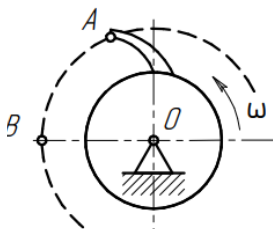


Рис. 101

Определить абсолютное ускорение частицы A воды, движущейся по лопатке с относительной скоростью $V_r = 2 \text{ м/с}$ и относительным тангенциальным ускорением $a_{\pi} = 51 \text{ м/с}^2$. Угловая скорость насоса $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$ и $OA = AB = BO = 0,5 \text{ м}$.

Ответ: $a = 224 \text{ м/с}^2$.

7.3.6. Стрела AB поворотного крана вращается вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω . По горизонтальной стреле от A к B движется тележка с постоянной скоростью v_0 . Определить абсолютную траекторию тележки (рис. 102), если в начальный момент тележка находилась на оси O_1O_2 .

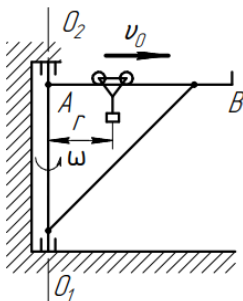


Рис. 102

Ответ: Траектория – архимедова спираль $r = \frac{v_0}{\omega} \varphi$, где r – расстояние тележки от оси вращения, φ – угол поворота крана вокруг оси O_1O_2 .

7.3.7. В кулисном механизме при качании кривошипа ОС вокруг оси О, перпендикулярной плоскости рисунка, ползун А, перемещаясь вдоль кривошипа ОС, приводит в движение стержень АВ, движущийся в вертикальных направляющих К (рис. 103). Расстояние ОК = l.

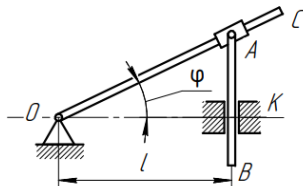


Рис. 103

Определить скорость движения ползуна А относительно кривошипа ОС в функции от угловой скорости ω и угла поворота φ кривошипа.

Ответ:
$$v_r = \frac{l \cdot \omega \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi}.$$

7.3.8. Найти скорости и ускорения точек M_1 , M_2 , M_3 и M_4 гусеницы трактора, движущегося без скольжения по прямолинейному участку пути со скоростью v_0 и ускорением a_0 (рис. 104).

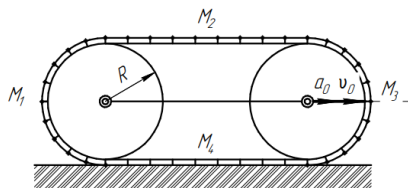


Рис. 104

Радиусы колес трактора равны R, скольжением гусеницы по ободу колес пренебречь.

Ответ: $v_0 = v_3 = v_0, v_2 = 2v_0, v_4 = 0.$

$$a_1 = \sqrt{a_0^2 + \left(\dot{a}_0 + \frac{v_0^2}{R} \right)^2}, \quad \omega_0 = 2\omega_0,$$

$$a_2 = \sqrt{a_0^2 + \left(\dot{a}_0 - \frac{v_0^2}{R} \right)^2}, \quad \omega_4 = 0.$$

Вопросы для самоконтроля

Какое движение точки в механике называют составным (сложным, абсолютным)?

Какое движение точки в механике называют относительным?

Какое движение точки в механике называют переносным движением.

Как определяется абсолютная скорость точки в составном движении?

Как определяется абсолютное ускорение точки при непоступательном переносном движении?

Как определяется абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении?

Каковы причины появления Кориолисова (поворотного) ускорения?

Каковы модуль и направление ускорения Кориолиса?

При каких условиях ускорение Кориолиса равно нулю?

ГЛАВА 8. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

8.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Плоскопараллельным называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости (рис. 105).

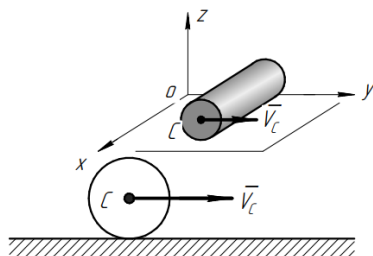


Рис. 105

Изучение плоскопараллельного движения тела сводится к рассмотрению движения плоской фигуры (сечения тела плоскостью, параллельной данной неподвижной плоскости), движущейся в своей плоскости (см. рис. 105). Движение плоской фигуры носит сложный характер и состоит из переносного поступательного движения фигуры вместе с точкой, принятой за полюс, и относительного вращательного движения фигуры вокруг этого полюса. В качестве полюса можно выбрать любую точку плоской фигуры, скорость и ускорение которой известны или их можно найти по условию задачи. Уравнения движения плоской фигуры в неподвижной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned}x_A &= x_A(t), \\ y_A &= y_A(t), \\ \varphi &= \varphi(t),\end{aligned}$$

где x_A и y_A – координаты точки A , принятой за полюс;

φ – угол поворота плоской фигуры вокруг полюса.

Скорость любой точки B плоской фигуры, исходя из сложного характера ее движения, определяется как геометрическая сумма скорости $\bar{V}_A$ точки A , принятой за полюс, и скорости $\bar{V}_{BA}$ точки B в относительном вращении плоской фигуры вокруг полюса точки A :

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}.$$

При этом скорость $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярна к отрезку AB , направлена в сторону вращения фигуры и по величине равна $V_{BA} = \omega \cdot BA$, где ω – угловая скорость плоской фигуры.

При решении задач о рычажных механизмах иногда более удобный и простой метод определения скорости точки плоской фигуры основан на теореме, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу.

Скорость точки плоской фигуры можно найти также с помощью мгновенного центра скоростей (МЦС), т. е. точки фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю (мысленный центр вращения). Если известны направления скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных из этих точек к направлениям их скоростей. Движение плоской фигуры в этом случае можно представить, как мгновенное вращение вокруг МЦС с мгновенной угловой скоростью ω . Скорости точек при этом равны вращательным скоростям вокруг мгновенного центра скоростей точки P :

$$V_A = \omega \cdot PA; \quad V_B = \omega \cdot PB \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что скорости точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, пропорциональны расстояниям этих точек до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB}.$$

В случае качения плоской фигуры без скольжения по неподвижной линии, лежащей в плоскости фигуры, мгновенный центр скоростей совпадает с точкой касания фигуры с линией земли. Так, например, если колесо трактора катится без скольжения, то МЦС находится в точке O_1 (рис. 106, а). Если же трактор движется со скольжением, то МЦС находится в точке O_2 (рис. 106, б), если с буксованием – в точке O_3 (рис. 106, в).

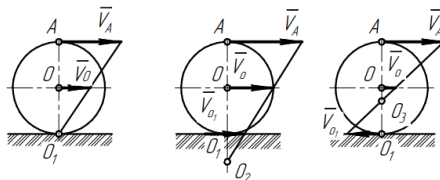


Рис. 106

8.2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ НАХОЖДЕНИЯ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА СКОРОСТЕЙ

При изучении плоскопараллельного движения важное значение имеет умение правильно находить МЦС. Рассмотрим различные частные случаи нахождения МЦС.

1 СЛУЧАЙ. Известны скорость одной из точек фигуры $\vec{V}_A$ угловая скорость в данный момент времени ω (рис. 107). МЦС находится на перпендикуляре, восстановленном к вектору скорости $\vec{V}_A$ на расстоянии:

$$AP = \frac{V_A}{\omega}.$$

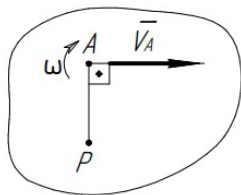


Рис. 107

Направление перпендикуляра находим, поворачивая вектор на 90° в сторону вращения.

2 СЛУЧАЙ. Известны направления скоростей двух точек плоской фигуры и модуль одной из них (рис. 108). Так как МЦС лежит на перпендикулярах к направлению скоростей, то, следовательно, он находится в точке пересечения этих перпендикуляров.

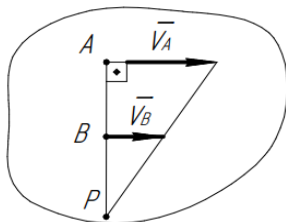


Рис. 108

Зная расстояние AP и V_A , можно найти мгновенную угловую скорость ω и скорость точки $\vec{V}_B$:

$$\omega = \frac{V_A}{AP}, \quad V_B = \omega \cdot BP = \frac{V_A \cdot BP}{AP}.$$

Направление ω определяется по направлению $\vec{V}_A$ относительно точки P , а направление $\vec{V}_B$ – по направлению угловой скорости тела ω .

3 СЛУЧАЙ. Скорости двух точек плоской фигуры перпендикулярны к соединяющему их отрезку, направлены в одну сторону и по модулю не равны (рис. 109).

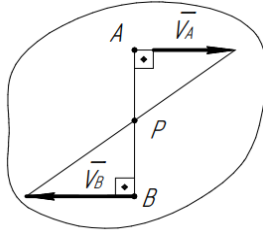


Рис. 109

МЦС находится в точке пересечения указанного отрезка с прямой, соединяющей концы векторов скоростей двух точек. Действительно, из подобия треугольников имеем

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB},$$

что справедливо, если МЦС – это точка P .

4 СЛУЧАЙ. Скорости двух точек перпендикулярны к соединяющему их отрезку и направлены в разные стороны (рис. 110).

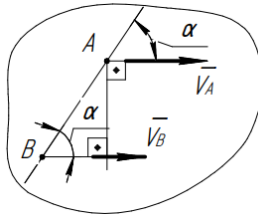


Рис. 110

Мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения указанного отрезка с прямой, соединяющей концы векторов скоростей двух точек. Доказательство, аналогичное приведенному в случае 3.

5 СЛУЧАЙ. Скорости двух точек параллельны и не перпендикулярны отрезку их соединяющему (см. рис. 111).

Из теоремы о проекциях скоростей двух точек на прямую соединяющую их, имеем, что $V_A = V_B$. Движение тела в данный момент времени мгновенно поступательное, так как МЦС находится в бесконечности, а угловая скорость тела $\omega = 0$. Такой же результат получается и в случае 3, если скорости точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ равны по модулю.

6 СЛУЧАЙ. Плоская фигура катится без проскальзывания по неподвижной поверхности (рис. 109).

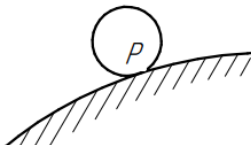


Рис. 111

МЦС находится в точке соприкосновения тела с поверхностью. Действительно, эта точка должна иметь одинаковую скорость для поверхности и фигуры, но скорость любой точки поверхности равна нулю.

Ускорение любой точки В плоской фигуры определяется как геометрическая сумма ускорения $\vec{a}_A$ точки А, принятой за полюс, и ускорения точки В в относительном вращении плоской фигуры вокруг полюса $\vec{a}_{BA}$:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n.$$

При этом касательная и нормальная составляющие ускорения $\vec{a}_{BA}$ соответственно равны:

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB; a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB,$$

где ω и ε – угловая скорость и угловое ускорение вращения плоской фигуры вокруг полюса.

Ускорение точки плоской фигуры можно найти также с помощью мгновенного центра ускорений (МЦУ), т. е. точки фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю. МЦУ находится на пересечении прямых, проведенных из двух каких-либо точек А и В фигуры под одним и тем же углом $\alpha = \arctg \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ к векторам ускорений этих точек. Угол α откладывается в сторону вращения фигуры, если вращение ускоренное, и в противоположную сторону, если вращение замедленное.

Ускорения точек плоской фигуры равны их ускорениям во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений Q и пропорциональны расстояниям этих точек от МЦУ:

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{QA}{QB}.$$

8.3. ПРИМЕР. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Пример. «Определение траектории ножей фрез ротационных машин»

Широкое применение на различных операциях в сельском хозяйстве находят фрезы, представляющие собой диски с ножами, равномерно размещенными по окружности. При работе фрезы ножи совершают плоскопараллельное движение, состоящее из переносного поступательного движения агрегата со скоростью $\bar{V}_M$ и относительного вращательного движения вокруг оси фрезерного барабана с угловой скоростью ω (рис. 112)

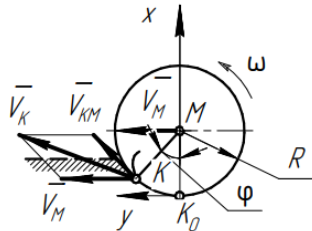


Рис. 112

Абсолютная скорость точки K ножа фрезы равна геометрической сумме скорости $\bar{V}_M$ точки M, принятой за плюс, и скорости $\bar{V}_{KM}$ точки K во вращательном движении вместе с фрезой вокруг плюса:

$$\bar{V}_K = \bar{V}_M + \bar{V}_{KM}, \quad (10.1)$$

где $V_{KM} = \omega \cdot R$.

Спроецировав векторное равенство (10.1) на координатные оси x и y, получим:

$$V_x = \dot{x} = R\omega \sin\varphi; V_y = \dot{y} = R\omega \cos\varphi \quad (10.2)$$

Учитывая, что при равномерном вращении фрезы $\varphi = \omega t$, перепишем уравнения (10.2) в виде:

$$d_x = (R\omega \sin\omega t)dt; d_y = (R\omega \cos\omega t + V_M)dt$$

и проинтегрировав их с учетом начальных условий (при $t=0, x_0=y_0=0$), найдем в параметрической форме уравнения траектории точки K ножа фрезы:

$$x = R(1 - \cos\omega t); y = R\sin\omega t + V_M t.$$

Как известно, эти уравнения описывают кривую, называемую трохоидой.

8.3.1. Определить точку M шатуна AB кривошипно-ползунного механизма, скорость которой направлена вдоль шатуна, а также найти величину

этой скорости (рис. 113). Длина кривошипа $OA = r$, угловая скорость его ω , угол между кривошипом и шатуном равен α .

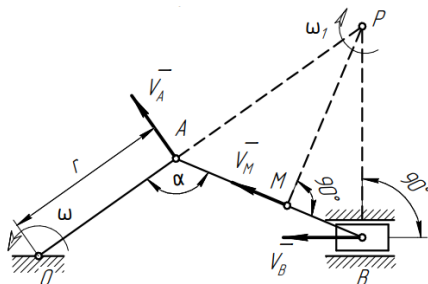


Рис. 113

РЕШЕНИЕ. Шатун AB совершает плоскопараллельное движение. Найдем положение мгновенного центра скоростей P шатуна, который находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к направлениям их скоростей. Опуская из точки P перпендикуляр на направление шатуна AB , получим ту точку M , скорость которой направлена вдоль шатуна.

Так как при плоскопараллельном движении скорости точек тела пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра окружностей, то $\frac{V_M}{V_A} = \frac{PM}{PA}$, откуда

$$V_M = V_A \frac{PM}{PA}.$$

Определив $V_A = \omega \cdot r$ и учитывая, что $\frac{PM}{PA} = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, находим значение скорости точки M шатуна:

$$V_M = R\omega \sin \alpha.$$

8.3.2. Кривошип OA механизма режущего аппарата сенокосилки вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 30 \text{ с}^{-1}$ и с помощью шатуна AB приводит в движение нож, соединенный с ползуном B , движущимся вдоль горизонтальных направляющих (рис. 114).

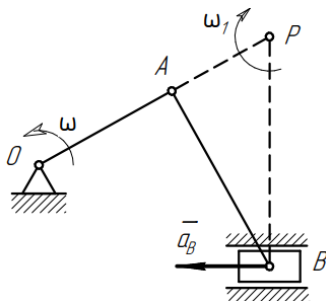


Рис. 114

8.3.3. Найти угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ϵ_1 шатуна, а также ускорение $\bar{a}_B$ ползуна B в положении, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной прямой углы 45° . Длина кривошипа $AO = 5$ см, длина шатуна $AB = 50$ см.

РЕШЕНИЕ. Приняв точку A за полюс, так как скорость и ускорение ее легко найти из условия задачи, запишем выражение для ускорения ползуна B :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n \quad (10.3)$$

Ускорение точки A найдем по формуле:

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 5 \cdot 30^2 = 4500 \text{ см/с}^2.$$

Для определения угловой скорости ω_1 шатуна найдем его мгновенный центр скоростей P (рис. 113). Тогда

$$V_A = \omega \cdot OA = PA \cdot \omega_1,$$

откуда $\omega_1 = \omega \frac{OA}{PA}$.

Так как по условию $PA = AB$, то

$$\omega_1 = \omega \frac{OA}{PA} = 30 \frac{5}{50} = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Для нахождения $\bar{a}_B$ и ϵ применим метод проекций. Изобразим картину векторов ускорений и направим оси x и y так, как показано на рис. 115. Спроектировав векторное уравнение (10.3) на ось y , получим:

$$a_B \cdot \cos 45^\circ = a_{BA}^n.$$

Здесь $a_{BA}^n = a_A^n = \omega_1^2 \cdot AB = 50 \cdot 3^2 = 450 \text{ см/с}^2$,

тогда $a_B = \frac{a_{BA}^n}{\cos 45^\circ} = 450\sqrt{2} \text{ см/с}^2$.

Угловое ускорение ϵ_1 шатуна можно найти, спроецировав уравнение (10.3) на ось x :

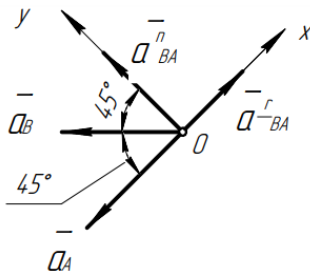


Рис. 115

$$-a_B \cdot \cos 45^\circ = a_{BA}^x - a_A,$$

откуда $a_{BA}^x = \epsilon_1 \cdot AB = a_A - a_B \cdot \cos 45^\circ$.

$$\text{Таким образом } \epsilon_1 = \frac{a_A - a_B \cdot \cos 45^\circ}{AB} = \frac{4500 - 450}{50} = 81 \text{ с}^{-2}.$$

8.3.4. Найти ускорения пальца кривошипа A ползуна B и точки C – середины шатуна AB кривошипно-ползунного механизма если длины шатуна и кривошипа одинаковы: $OA = AB = r$ и кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 116).

РЕШЕНИЕ. Ускорение точки A равно $a_A = QA \cdot \omega^2 = r \cdot \omega^2$ и направлено от A к O . Мгновенный центр скоростей шатуна (см. рис. 116) находится в точке P .

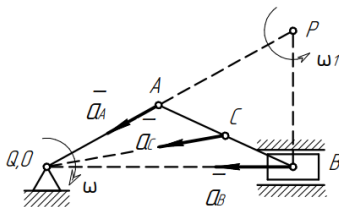


Рис. 116

Так как $V_A = OA \cdot \omega = PA \cdot \omega_1$ и $OA = PA$, то угловая скорость шатуна $\omega_1 = \omega$ и постоянна по величине. Поэтому угловое ускорение шатуна $\epsilon_1 = 0$ и $\alpha = \arctg \frac{\epsilon_1}{\omega^2}$. В связи с этим мгновенный центр ускорений Q шатуна в дан-

ном случае находится на пересечении прямых, по которым направлены ускорения точек A и B , и совпадает с осью вращения O_1 кривошипа.

Ускорения точек B и C найдутся из пропорции

$$\frac{a_A}{QA} = \frac{a_B}{QB} = \frac{a_C}{QC},$$

где $QA = r$; $QB = 2r\omega^2 \cos \omega t$; $QC = \frac{r}{2} \sqrt{1 + 8 \cos^2 \omega t}$.

Таким образом $a_B = 2r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t$; $a_C = \frac{r}{2} \omega^2 \sqrt{1 + 8 \cos^2 \omega t}$.

8.4. УПРАЖНЕНИЯ

8.4.1. В механизме компрессора кривошип OA длиной r , вращается с угловой скоростью ω_0 (рис. 117). Определить скорость V_C точки C в момент, когда $\varphi = 90^\circ$, если при этом точки O , B и C лежат на горизонтальной прямой, а отрезок $BD = b$ и перпендикулярен к OB ; $CD = a$.

Ответ: $V_C = \frac{ra}{b} \cdot \omega_0$.

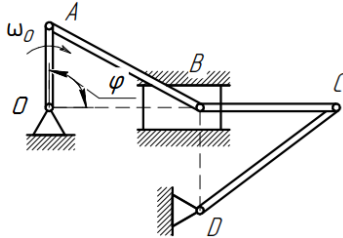


Рис. 117

8.4.2. В механизме привода решета DO_1 , предназначенного для отделения крупных фракций сыпучих материалов, кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 118). Определить угловые скорости ω_1 и ω_2 решета DO_1 и шатуна DC для правого горизонтального положения кривошипа OA . При решении задачи принять, что $OA = \frac{a}{2}$; $AC = \frac{3}{2}a$ и фигура $BCDO_1$ – квадрат со стороной a .

Ответ: $\omega_1 = \frac{\omega}{5}$; $\omega_2 = 0$.

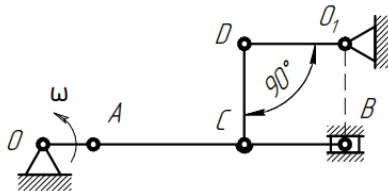


Рис. 118

8.4.3. Вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости чертежа, вращается кривошип $OA = r = 30$ см механизма сеноворотилки

с угловой скоростью $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$ и приводит в движение шатун AD , соединенный шарнирно в точке B с ползуном, движущимся вдоль горизонтальных направляющих (рис. 119). Для положения механизма, когда угол $\alpha = 30^\circ$ и $OA = AB = BD$, определить мгновенную угловую скорость шатуна и скорости точек B и D .

Ответ: $\omega_1 = 20 \text{ с}^{-1}$; $\omega_B = 2r\omega \cdot \sin \alpha = 600 \text{ см/с}$; $v_D = \sqrt{3r\omega} 1038 \text{ см/с}$.

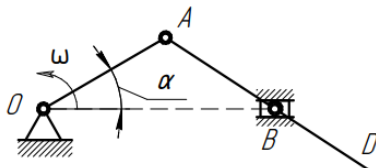


Рис. 119

8.4.4. Кривошип OA механизма режущего аппарата сенокосилки вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 30 \text{ с}^{-1}$ и с помощью шатуна AB приводит в движение нож, соединенный с ползуном B , движущимся вдоль горизонтальных направляющих (рис. 120). Найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε шатуна, а также ускорение ω_B ползуна B в положении, когда кривошип займет верхнее вертикальное положение. Длины $OA = OD = 5 \text{ см}$; $AB = 50 \text{ см}$.

Ответ: $\omega_0 = 0$; $\varepsilon = 91,87 \text{ с}^{-2}$; $\omega_B = 918,74 \text{ см/с}^2$.

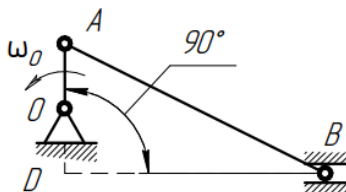


Рис. 120

8.4.5. В шарнирных четырехзвенных механизмах $OABC$ щековой дробилки для шести представленных вариантов кривошип OA вращается с постоянной скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$. В положениях механизмов, изображенных на схемах (рис. 121), требуется определить скорость и ускорение точки B пальца коромысла при следующих данных: $OA = 0,1 \text{ м}$, $AB = 0,6 \text{ м}$ и $BC = 0,3 \text{ м}$.

Ответ: для случаев а, б, в, г, д, е соответственно скорости (м/с) равны: 0,577; 0,577; 0; 1; 1 и 1,414, а также ускорения (м/с²) – 11,976; 11,976; 12,91; 10,3; 7,453 и 7,938.

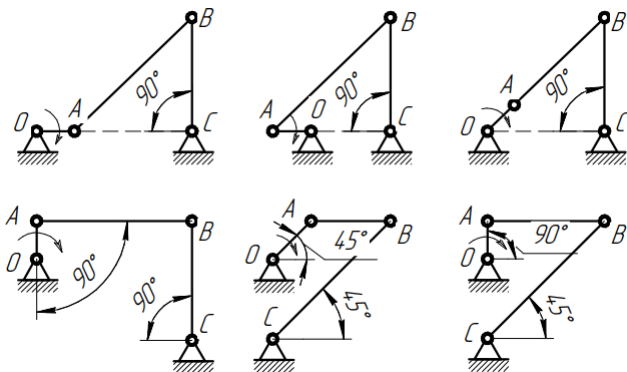


Рис. 121

8.4.6. В шарнирном четырехзвенном механизме ОАВС грехота кривошип ОА вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$. В положении механизма, показанном на рисунке 122, определить скорость и ускорение точки В, положение мгновенного центра скоростей и мгновенного центра ускорений шатуна АВ, а также угловую скорость и угловое ускорение коромысла ВС, если $OA = 1 \text{ м}$, $AB = 1 \text{ м}$, $AC = 0,3 \text{ м}$.

Ответ: $V_B = 0,314 \text{ м/с}$; $\omega_B = 11,054 \text{ м/с}^2$; $\omega_{BC} = 1,05 \text{ с}^{-1}$; $\epsilon_{BC} = 36,83 \text{ с}^{-2}$.

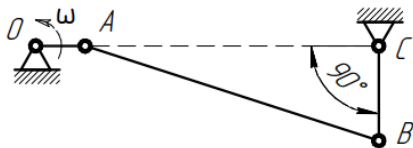


Рис. 122

8.4.7. В механизме соломотряса кривошип AB_1 вращается с постоянной угловой скоростью, соответствующей $n = 225 \text{ об/мин}$. Определить мгновенные угловые скорости коромысла C_1D и шатуна B_1C_1 в тот момент, когда кривошип AB_1 и шатун B_1C_1 образуют одну прямую, если $AB_1 = 50 \text{ мм}$; $B_1C_1 = 1250 \text{ мм}$; $DC_1 = 250 \text{ мм}$; $S = 1250 \text{ мм}$; $h = 150 \text{ мм}$ (рис. 123).

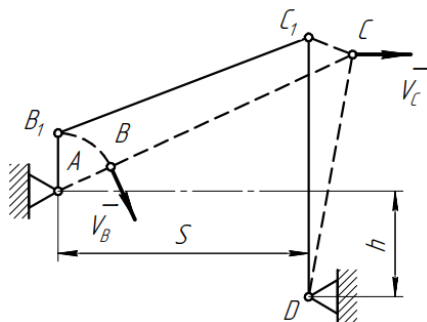


Рис. 123

Ответ: $\omega_{CD} = 0$; $\omega_{BC} = 0,3 \text{ с}^{-1}$.

8.4.8. Найти угловую скорость шатуна AB, а также величину и направление скорости его средней точки C при трех положениях кривошипа OA:

1) $\varphi = 0$; 2) $\varphi = 45^\circ$; 3) $\varphi = 90^\circ$. Угловая скорость кривошипа OA – $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$. Размеры: OA = 40 см; AB = 40 см; AC = CB (рис. 124).

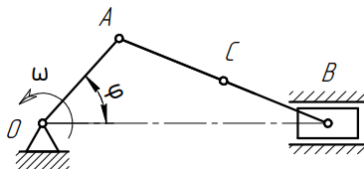


Рис. 124

Ответ: $\omega_{AB} = 20 \text{ с}^{-1}$; $\varphi = 0$; $V_c = 4 \text{ м/с}$; $\varphi = 45^\circ$; $V_c = 8,9 \text{ м/с}$; $\varphi = 90^\circ$; $V_c = 12 \text{ м/с}$.

8.4.9. Коленчатый вал (см. рис. 124) в период пуска двигателя вращается с угловой скоростью ω_0 и угловым ускорением ε_0 . Определить ускорение поршня B и угловое ускорение шатуна AB при: 1) крайнем верхнем и 2) крайнем правом положениях кривошипа OA, если длина кривошипа r , а длина шатуна l .

Ответ: 1) $a_B = \omega_0^2 \cdot \left(1 + \frac{r}{l}\right)$; $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 r}{l}$; 2) $a_B = r \left(\varepsilon_0 - \frac{\omega_0^2 r}{\sqrt{l^2 - r^2}} \right)$; $\varepsilon = \frac{\omega_0^2 r}{\sqrt{l^2 - r^2}}$.

8.4.10. Автомобиль движется по горизонтальному прямолинейному участку дороги по закону $S = 0,2t^2$ (S – м, t – сек.). Определить в момент $t = 5$

с ускорения точек C и D , расположенных на концах вертикального диаметра заднего колеса радиусом $R = 0,5$ м, если колеса катятся без скольжения (рис. 125).

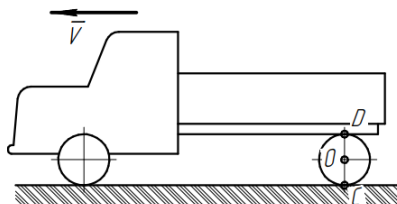


Рис. 125

Ответ: $a_c = 8 \text{ м/с}^2$; $a_D = 8,1 \text{ м/с}^2$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Какое движение твердого тела называют плоскопараллельным?

На какие простейшие движения можно разложить плоскопараллельное движение?

Какие уравнения описывают плоскопараллельное движение?

Как определяют скорость произвольной точки плоской фигуры, если известна скорость полюса?

Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей (МЦС)?

Как распределены скорости точек тела по отношению к МЦС?

Какие существуют способы определения положения МЦС?

Как определяют ускорения произвольных точек тела, совершающего плоскопараллельное движение?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

.....

1. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Учеб. пособие для вузов. В 2-х т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука, 2007. – 670 с.
2. Гернет, М. М. Курс теоретической механики. М.: 1965 и послед. изд.
3. Диевский, В. А. Теоретическая механика. Интернет-тестирование базовых знаний: учебное пособие / В. А. Диевский, Диевский А. В. – СПб.: Лань, 2010. – 144 с.
4. Зегжда, С. А. Теоретическая механика. 3-е изд., пер. и доп. Учебник для бакалавров. / С. А. Зегжда, Н. Н. Поляхов, Н. Н. Поляхов, М. П. Юшков – М.: Юрайт, 2012.
5. Кепе, О. Э. Сборник коротких задач по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.
6. Лачуга, Ю. Ф. Теоретическая механика Учеб. пособие для вузов / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. – М.: КолосС, 2005. – 576 с.
7. Мещерский, И. В. Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по техн. спец. / И. В. Мещерский; Под ред. В. А. Пальмова, Д. Д. Меркина. – 45-е изд., стер. – СПб. и др.: Лань, 2009. – 447 с.
8. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / Под ред. Н. В. Бутенина, А. И. Лурье, Д. Р. Меркина. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
9. Молотников В. Я. Механика конструкций. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: учебное пособие. – СПб.: Лань, 2012. – 540 с.
10. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
11. Резник, Б. Н. Теоретическая механика в примерах и задачах сельскохозяйственного производства. – Алма-Ата, 1985. – 153 с.
12. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С. М. Тарг. – 15-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2008. – 415 с.
13. Турбин, Б. И. Сборник задач по теоретической механике / Б. И. Турбин, С. И. Рустамов. – Киев: вища школа, 1978. – 158 с.
14. Яблонский А. А., В. М. Никифорова Курс теоретической механики. Учеб. пособие для вузов: 13-е изд., исправ. – М.: Интеграл-Пресс, 2009. – 603 с.
15. Яковенко, Г. Н. Краткий курс теоретической механики: учебное пособие [Электронный ресурс]. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 117 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

.....

Бердюгина Ольга Владимировна – доцент кафедры технологических и транспортных машин, почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации. Читает курсы теоретической механики, теории механизмов и машин, инженерной и компьютерной графики, компьютерной графики.

Областью научных интересов является методика преподавания общеинженерных дисциплин.

Стиганова Лариса Юрьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры инженерной графики института Фундаментального образования Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, читает лекции, проводит практические и лабораторные занятия по дисциплинам: Начертательная геометрия, Инженерная графика, Компьютерная графика. Областью научных интересов является методика преподавания графических дисциплин средствами электронного обучения.

Юсупов Мамед Лечиевич – декан факультета инженерных технологий, кандидат экономических наук, доцент, Почетный работник высшего профессионального образования РФ. Читает лекции по дисциплинам: технологические и транспортные машины, основы теории поля, модернизация машин и оборудования сельскохозяйственного предприятия.

Областью научных интересов являются исследования внесения жидких удобрений в почву.

Учебное издание

БЕРДЮГИНА Ольга Владимировна
СТРИГАНОВА Лариса Юрьевна
ЮСУПОВ Мамед Лечиевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
В ПРИМЕРАХ АГРАРНОГО ПРОИЗВОДСТВА.
СТАТИКА. КИНЕМАТИКА

Учебник для аграрных вузов

Текст дается в авторской редакции
Дизайнер-верстальщик А. Ю. Тюменцева

Подписано в печать 14.10.2020. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Alegreya, Alegreya Sans
Уч.-изд. л. 3,26. Усл. печ. л. 6,74. Тираж 500 экз. Заказ _____

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский государственный аграрный университет»
620075, Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта, 42

Отпечатано в Универсальной Типографии «Альфа Принт»
620049, Екатеринбург, пер. Автоматики, 2Ж
Тел.: +7 (343) 222-00-34. Эл. почта: mail@alfaprint24.ru

Оригинал-макет подготовлен в федеральном государственном бюджетном
образовательном учреждении высшего образования
«Уральский государственный аграрный университет»
620075, Екатеринбург, ул. Карла Либкнехта, 42